

오답의 재발견

• 작도와 합동 •



교사용 지도서

미션

작도의 비밀, 단 하나의 삼각형을 만드는 ‘숨은 단서’를 찾아라!

탐정: _____



< 탐정미션 1. 무엇이 맞을까? >

다음은 삼각형의 모양과 크기가 하나로 정해지는 조건에 대한 두 학생의 의견입니다. 두 학생의 의견에 대해 여러분의 생각을 정하고, 그 이유도 적어 봅시다.



삼각형의 세 변의 길이가 주어진다면 모양과 크기가 하나로 정해진다는 걸 지난 시간에 배웠어. 그렇다면 세 각의 크기가 주어졌어도 모양과 크기가 하나로 정해지지 않을까?



삼각형의 두 변의 길이와 한 각의 크기가 주어졌어도 모양과 크기가 하나로 정해질 것 같아.

나의 생각

- ▶ 민수의 의견에 (동의한다. / 동의하지 않는다.) 왜냐하면 세 각의 크기가 정해지면 삼각형의 모양도 하나로 정해질 것 같기 때문이다.
- ▶ 지연이의 의견에 (동의한다. / 동의하지 않는다.) 왜냐하면 두 변의 길이와 한 각까지 조건이 세 가지이므로 하나로 결정될 것 같기 때문이다.



활동 개관

두 변의 길이와 한 각의 크기(SSA)가 주어지거나, 세 각의 크기(AAA)가 주어졌을 때 삼각형의 모양과 크기가 하나로 정해지는지 판단해 보게 한다.



개발 의도

학생들이 초등학교에서 학습한 각의 크기와 합동 개념 및 이전 차시에 학습한 삼각형의 작도 조건을 바탕으로 자신의 생각을 먼저 표현하도록 하여, 삼각형의 결정 조건에 대해 가질 수 있는 오개념을 의도적으로 드러내도록 설계하였다. 학생들은 이전에 학습한 SSS 작도 조건, 즉 삼각형을 만들 수 있는 세 변의 길이가 주어지면 삼각형이 하나로 결정된다는 사실을 다른 조건에도 그대로 적용하여, “세 각의 크기가 주어지면 삼각형이 하나로 결정된다.” 또는 “두 변의 길이와 한 각의 크기가 주어지면 각의 위치와 관계없이 삼각형이 하나로 결정된다.”고 생각할 수 있다. 본 활동은 이러한 오개념을 즉시 교정하기보다 학생이 자신의 생각과 판단 근거를 표현하게 하고, 이후 작도 및 탐색 활동에서 자신의 예상과 실제 결과를 비교하며 스스로 의문을 갖도록 하는 데 목적이 있다. 이는 1차시의 오개념 인지에서 2차시의 숨은 조건 탐색으로 이어지는 RISE의 흐름에 해당한다.



발문

- “각의 크기가 모두 같으면 변의 길이도 모두 같을까요?”
- “조건이 세 개라는 것만으로 삼각형이 하나로 결정된다고 할 수 있을까요?”
- “두 변과 한 각이 주어졌을 때, 각의 위치도 중요하지 않을까요?”
- “직접 작도해 보면 예상한 결과와 같을까요?”

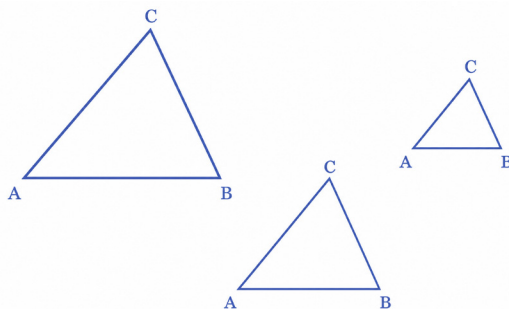
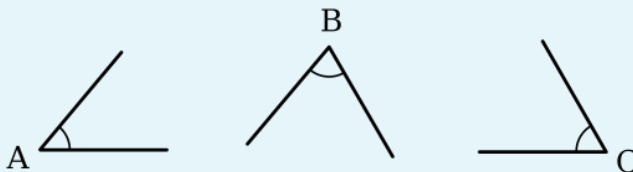


지도상의 유의점 및 대응 방안

- 학생이 오답을 제시하더라도 교사는 즉시 "틀렸다"고 수정하거나 끼인각, 추가적인 길이 조건과 같은 정답을 먼저 제시하지 않는다. 학생들이 자신의 판단 근거를 설명하고 서로의 생각을 비교하도록 하되, 이 단계에서는 어느 의견이 옳은지 결론을 내리지 않는다.
- 교사는 정답을 설명하기보다 학생들이 이어지는 작도 활동과 2차시의 탐색 활동에서 자신의 예상과 실제 결과 사이의 차이를 발견하고, 기존 생각을 스스로 재검토하도록 유도한다.

문제상황 1 민수의 의견을 확인하기 위해 아래 문제를 해결해 봅시다.

- 1 $\angle A, \angle B, \angle C$ 을 세 각으로 하는 삼각형 ABC를 작도하고, 기름종이를 이용해 짝과 비교해 봅시다.



- 2 작도한 결과를 통해 새롭게 알게 된 사실을 적어 봅시다.

세 각의 크기가 주어져도 항상 삼각형이 하나로 결정되는 것은 아니다.



활동 개관

삼각형의 세 각의 크기가 각각 주어졌을 때, 주어진 조건만으로 삼각형을 직접 작도해 보고 그 결과를 짝과 비교하게 한다. 작도한 결과를 통해 새롭게 알게 된 사실은 무엇인지 생각하게 한다.



개발 의도

학생이 컴퍼스와 눈금 없는 자를 이용해 세 각의 크기가 주어진 삼각형을 직접 작도해 봄으로써, 도입부에서 가졌던 '세 각의 크기가 주어지면 삼각형이 하나로 결정된다.'는 오개념에 인지적 불균형을 유발하기 위한 활동이다. 학생들은 주어진 조건만으로 삼각형을 작도하는 과정에서 시작 선분의 길이를 스스로 정할 수밖에 없음을 경험하게 된다. 이후 자신이 작도한 삼각형과 짝이 작도한 삼각형을 비교하면서 세 각의 크기는 같지만 처음 정한 선분의 길이에 따라 대응하는 변의 길이가 달라져 크기가 다른 삼각형이 만들어질 수 있음을 직관적으로 확인하게 된다. 이를 통해 세 각의 크기만으로는 삼각형이 하나로 결정되지 않음을 인식하고, 삼각형을 하나로 결정하기 위해서는 자신이 미처 고려하지 못한 다른 조건이 있을 수 있다는 의문을 갖도록 설계하였다.



발문

“두 삼각형에서 같은 점과 다른 점은 무엇인가요?”

“세 각의 크기는 같은데 결과도 같았나요?”

“같은 조건인데도 왜 서로 다른 삼각형이 만들어졌을까요?”

“삼각형을 그릴 때 우리가 스스로 정한 것은 무엇이었나요?”

“오늘 활동을 통해 새롭게 알게 된 점은 무엇인가요?”

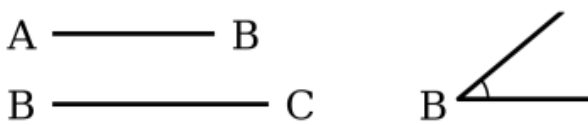
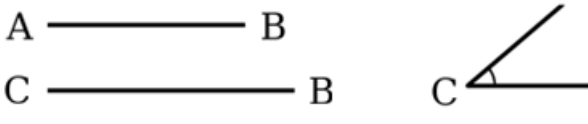
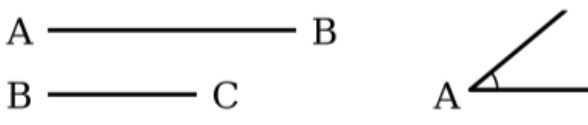


지도상의 유의점 및 대응 방안

- 학생들이 주어진 세 각의 조건만으로 삼각형을 직접 작도한 후, 짝 또는 모둠원과 결과를 비교하도록 한다. 이 과정에서 시작 선분의 길이를 각각 다르게 정하였더라도 세 각의 크기는 같지만 크기가 서로 다른 삼각형이 만들어질 수 있음을 시각적으로 확인하도록 한다. 어느 한 학생의 작도가 틀렸다고 판단하기보다, 같은 조건에서도 서로 다른 결과가 나타났다는 사실을 함께 확인하는 데 초점을 둔다.

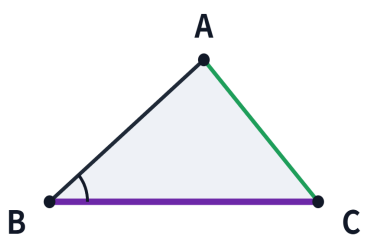
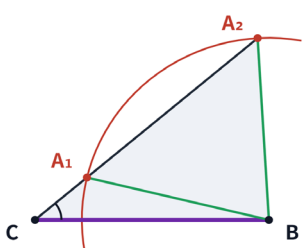
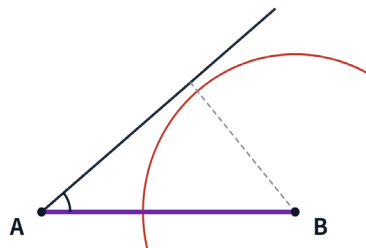
- 이 단계에서는 교사가 ‘한 번의 길이’, ASA 조건과 같은 결론을 직접 제시하지 않는다. 학생들이 세 각만으로는 삼각형이 하나로 결정되지 않는다는 사실을 인식하고, ‘무엇이 더 필요할까?’라는 의문을 스스로 갖도록 하는 데 초점을 둔다. 이러한 의문이 이어지는 문제 상황2(SSA 조건 작도)와 2차시 탐색 활동의 출발점이 되도록 안내자의 역할을 수행한다.

문제상황 2 지연이의 의견을 확인하기 위해 아래 문제를 해결해 봅시다.

번호	주어진 조건	작도 순서
1		① 선분 BC ② 각 B ③ 선분 AB 또는 ① 각 B ② 선분 BC ③ 선분 AB
2		① 선분 CB ② 각 C ③ 선분 AB 또는 ① 각 C ② 선분 CB ③ 선분 AB
3		① 선분 AB ② 각 A ③ 선분 BC 또는 ① 각 A ② 선분 AB ③ 선분 BC

1 위 조건에 맞는 삼각형을 각각 작도하려고 할 때, 세 요소의 작도 순서를 표에 적어 봅시다.

2 위에서 적은 작도 순서에 따라 작도해 보고, 만들어지는 삼각형의 개수를 적어 봅시다.

1	2	3
 만들어진 삼각형의 개수: <u>1</u> 개	 만들어진 삼각형의 개수: <u>2</u> 개	 만들어진 삼각형의 개수: <u>0</u> 개

3 작도한 결과를 통해 새롭게 알게 된 사실을 적어 봅시다.

두 변의 길이와 한 각이 주어져도 항상 삼각형이 하나로 결정되는 것은 아니다.

어떤 경우에는 삼각형이 두 개 만들어질 수도 있고, 어떤 경우에는 만들어지지 않을 수도 있다.



활동 개관

두 변의 길이와 한 각이 주어진 세 가지 상황을 제시한다. 눈금 없는 자와 컴퍼스를 이용해 그림으로 제시된 각과 선분의 길이를 바탕으로 각각 삼각형을 직접 작도해 보고, 삼각형이 몇 개 만들어질 수 있는지 확인해 본다. 작도한 결과를 통해 새롭게 알게 된 사실을 적게 한다.



개발 의도

학생들은 두 변의 길이와 한 각이 주어지면 삼각형이 항상 하나로 결정된다고 생각하는 경우가 많다. 이를 확인하기 위해 세 가지 상황을 직접 작도하게 하여, 어떤 경우에는 삼각형이 두 개 작도되고, 어떤 경우에는 삼각형이 만들어지지 않는 결과를 직접 경험하도록 설계하였다. 이를 통해 주어진 조건의 개수만으로는 삼각형이 하나로 결정된다고 말할 수 없으며, 조건이 세 개라는 사실만으로는 삼각형이 하나로 결정되지 않을 수 있다는 점을 인식하고, 무엇이 결과를 다르게 만드는지에 대한 의문을 갖도록 설계하였다. 그리고 작도 순서를 먼저 적어보도록 하여 작도 과정에서 겪을 수 있는 어려움을 줄이고자 하였다.



발문

“처음에 예상했던 결과와 같았나요?”

“세 가지 상황의 작도 결과는 모두 같았나요?”

“결과가 서로 달랐던 이유는 무엇이라고 생각하나요?”

“오늘 활동에서 가장 궁금했던 점은 무엇이었나요?”



지도상의 유의점 및 대응 방안

- 학생들이 컴퍼스를 이용해 주어진 각과 크기가 같은 각을 정확하게 작도할 수 있도록 순회 지도한다. 세 가지 상황을 모두 작도한 후에는 모두 두 변의 길이와 한 각이라는 세 가지 조건이 주어졌음에도 작도 결과가 서로 다를 수 있음을 확인하도록 한다. 삼각형이 두 개 작도되거나 아예 만들어지지 않는 경우에도 이를 오류로 판단하지 말고, 나타난 결과 자체를 탐구의 대상으로 받아들이도록 안내한다.

- 이 단계에서는 교사가 결과가 나타난 이유를 설명하거나, 끼인각, SAS 조건과 같은 개념을 직접 제시하지 않는다. 학생들이 자신의 예상과 실제 작도 결과를 비교하며 ‘왜 어떤 경우에는 삼각형이 하나로 결정되지 않을까?’라는 의문을 갖도록 하는 데 초점을 둔다. 이러한 의문을 바탕으로 “그렇다면 삼각형이 하나로 결정되려면 어떤 조건이 필요할까요? 다음 시간에는 AlgeoMath를 활용하여 직접 탐구해 봅시다.”라고 안내하며 다음 차시의 탐구 활동으로 자연스럽게 연결한다.



[문제 상황 1]과 [문제 상황 2]를 통해 내가 가지게 된 '삼각형의 모양과 크기가 하나로 정해지는 조건'에 대한 생각을 아래에 적어 봅시다.



탐정 메모

처음에는 조건이 3개 주어진다면 삼각형은 항상 하나로 결정된다고 생각했다. 하지만 활동을 해 보니 세 각의 크기만 주어진다면 크기가 다른 삼각형이 만들어질 수 있었고, 두 변의 길이와 한 각의 크기가 주어진다면 삼각형이 2개 만들어지거나 안 만들어지는 경우도 있었다. 어떻게 하면 삼각형의 모양과 크기가 하나로 정해질 수 있을까?



활동 개관

[문제 상황1]과 [문제 상황2]를 통해 내가 가지게 된 '삼각형의 작도'에 대한 생각이 어떻게 변화했는지 [탐정 메모] 빈칸에 스스로 적어 본다.



개발 의도

1차시 활동의 핵심인 '개념 인식 및 인지적 불균형'을 학생 스스로 글로 표현하며 명확히 구조화하도록 돕는다. 기존에 당연하게 여겼던 생각(조건이 3개면 항상 하나의 삼각형이 결정될 것이라는 생각)을 돌아보고, 실제 작도를 통해 확인한 결과를 자신의 언어로 정리하게 한다. 이를 통해 삼각형이 하나로 결정되는 데에는 자신이 미처 고려하지 못한 요소가 있을 수 있다는 의문을 갖게 하고, 다음 차시의 탐구 활동에 대한 필요성을 느끼도록 한다.



발문

- "오늘 활동을 통해 무엇을 새롭게 알게 되었나요?"
- "그렇다면 삼각형이 하나로 결정되기 위해서는 어떤 조건이 더 필요할까요?"
- "그 조건이 무엇인지 다음 시간에 함께 찾아볼까요?"



지도상의 유의점 및 대응 방안

- 학생들이 SAS 합동 조건, 끼인각 등의 수학적 용어를 정확하게 사용하지 못하더라도 자신의 생각을 자유롭게 표현하도록 격려한다. 이 단계에서는 정답을 맞히는 것보다 작도 활동을 통해 새롭게 알게 된 점이나 의문을 자신의 언어로 정리하는 데 의미를 둔다.
- 학생들이 작성한 탐정 메모를 발표하고 서로의 생각을 비교·공유하도록 한다. 다양한 의견을 나누는 과정에서 같은 결과를 보고도 서로 다른 생각을 할 수 있음을 확인하고, 오답을 단순한 실수가 아니라 새로운 탐구를 시작하는 단서로 받아들이는 분위기를 조성한다.
- 작도 순서는 한 가지로 고정되어 있지 않다. 예를 들어 1번 조건은 '선분 BC → 각 B → 선분 AB'와 '각 B → 선분 BC → 선분 AB'의 두 순서가 모두 가능하다. 다만 주어진 각을 이루는 두 변에 포함되지 않는 변은 앞서 정해진 두 요소인 변과 각을 이용하여 교점을 찾아 정해야 하므로 마지막 단계에 작도한다. 학생이 표와 다른 순서를 제시하더라도 이 원칙에 맞으면 정답으로 인정한다.

미션

작도의 비밀, 단 하나의 삼각형을 만드는 ‘숨은 단서’를 찾아라!

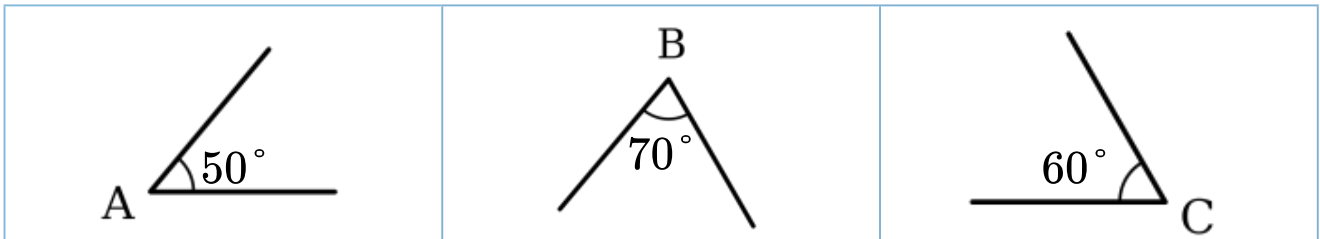
탐정: _____



< 탐정미션 2. 숨은 단서를 찾아라! >

탐색 1 세 각의 크기가 주어진 상황에서 삼각형의 모양과 크기가 하나로 정해지는 데 필요한 조건을 탐색해 봅시다.

1 지난 시간에 아래 세 각 A, B, C의 크기가 주어졌을 때, 삼각형의 모양과 크기가 하나로 정해지지 않음을 확인하였습니다.



아래는 위 조건을 만족하는 세 개의 삼각형을 그린 것입니다. 위의 조건만으로는 왜 삼각형의 모양과 크기가 하나로 정해지지 않는지 생각해 보고, 어떤 조건이 추가되면 삼각형의 모양과 크기가 하나로 정해질지 아래 표에 적어 봅시다.

			추가 조건
			한 변의 길이 또는 선분 AB는 5 cm 또는 선분 BC는 5 cm

2 [추가 조건]까지 만족하는 삼각형을 알지오매스를 이용하여 그려 보고, 삼각형의 모양과 크기가 하나로 정해지는지 확인해 봅시다.



Algeomath 링크

<https://www.algeomath.kr/algeo/algeomath/app/view?id=97d8d9fdc039573381638d42db1e4d26>

추가 조건	[추가 조건]을 만족하는 삼각형
선분AB의 길이는 5 cm이다.	
선분BC의 길이는 5 cm이다.	

- 3 알지오매스를 이용하여 삼각형 ABC를 그릴 때, 실제로 활용한 조건과 활용하지 않은 조건을 적어 봅시다.

활용한 조건: 한 변의 길이, 그 변의 양 끝의 두 각의 크기

활용하지 않은 조건: 나머지 한 각의 크기

- 4 위 활동에서 찾은 '숨은 단서'를 정리해 봅시다.

오늘 발견한 숨은 단서!

삼각형의 모양과 크기가 하나로 정해지기 위한 첫번째 숨은 단서는

한 변의 길이와 그 양 끝 각의 크기가 주어지는 것

이다!



활동 개관

[지난 시간에 세 각(A, B, C)만으로는 삼각형이 하나로 결정되지 않았던 결과를 바탕으로, 삼각형이 하나로 결정되기 위해 필요한 추가 조건이 무엇일지 모둠별로 추론한다. 이후 추론한 조건을 바탕으로 AlgeoMath를 이용해 삼각형을 작도하고, 실제로 삼각형이 하나로 결정되는지 확인하며 숨은 단서를 탐색한다.



개발 의도

1차시에서 세 각의 크기만으로는 삼각형이 하나로 결정되지 않는다는 사실을 확인한 학생들이, 삼각형을 하나로 결정하기 위해 필요한 조건을 스스로 추론하고 검증하도록 설계한 활동이다. 추가 조건을 직접 설정하고 AlgeoMath를 활용하여 빠르게 그려보면서, 설정한 조건이 추가되었을 때 삼각형이 하나로 결정되는지를 확인한다. 이러한 탐구 과정을 통해 세 각과 한 변이 함께 주어질 때 삼각형이 하나로 결정됨을 스스로 발견하고, 그리는 과정에서 사용되지 않은 각을 떠올리며 결과적으로는 두 각과 한 변, 정확히는 한 변과 양 끝각이 주어졌을 때 삼각형의 모양과 크기가 하나로 정해짐을 깨달을 수 있도록 한다.



발문

"지난 시간에 어떤 결과를 확인했나요?"

"세 각만으로는 삼각형이 하나로 결정되었나요?"

"삼각형이 하나로 결정되려면 무엇이 더 필요할까요?"

"그렇다면 두 변의 길이가 이미 주어져 있는 경우에는 어떤 조건이 더 필요할까요?"



지도상의 유의점 및 대응 방안

- 활동을 시작하기 전에 1차시에서 확인한 작도 결과를 다시 떠올리도록 한다. 학생들이 세 각만 주어졌을 때는 크기가 다른 여러 개의 삼각형이 만들어졌고, 두 변과 한 각이 주어졌을 때도 항상 삼각형이 하나로 결정되지 않았음을 상기하도록 한다. 이때 교사는 그 이유를 설명하기보다, "그렇다면 무엇이 더 필요할까?"라는 탐구 과제를 자연스럽게 제시한다.

- 학생들이 처음부터 '한 변의 길이'만을 답하도록 유도하지 않는다. 모둠별로 다양한 추가 조건을 자유롭게 제안하고, 그 조건을 AlgeoMath를 이용해 검증하도록 한다. 탐구 과정에서 자신의 예상과 결과를 비교하며 스스로 적절한 조건을 찾아가도록 지원한다.

- 학생들이 AlgeoMath에서 자신이 제안한 추가 조건을 적용하여 삼각형을 직접 작도하고, 조건을 만족하는 삼각형이 하나만 만들어지는지를 충분히 확인하도록 한다.

- 학생들이 "한 변의 길이가 필요하다."는 공통점을 발견하면 그 이유를 모둠별로 공유하도록 한다. 이후 교사는 학생들의 표현을 바탕으로 세 각과 한 변의 길이가 함께 주어질 때 삼각형이 하나로 결정됨을 정리하고, 이를 다음 탐색 활동의 출발점으로 연결한다. 이때, 세 각의 크기와 한 변의 길이가 주어졌을 때 필요 없었던 각을 제외하고 남은 두 각과 한 변의 관계는 어떤지 생각하게 하여, 꼭 세 각까지 주어지지 않아도 됨을 인식하게 하고, 두 각(한 변의 양 끝각)과 한 변의 길이가 주어지면 삼각형이 하나로 결정됨을 깨닫게 한다. 이 단계에서는 ASA라는 용어를 형식적으로 정리하되, 학생들의 탐구 결과를 일반화하는 수준에서 제시한다.

탐색 2

두 변의 길이와 한 각의 크기가 주어진 상황에서 삼각형의 모양과 크기가 하나로 정해지는 데 필요한 조건을 탐색해 봅시다.

- 모둠별로 한 사람당 과제 카드를 하나씩 선택해서 알지오매스를 이용하여 삼각형을 각각 그려 보고, 주어진 조건을 만족하는 삼각형이 몇 개 만들어지는지 적어 봅시다.

과제 카드 1		과제 카드 2	
주어진 조건	만들어진 삼각형 개수	주어진 조건	만들어진 삼각형 개수
$\overline{AB} = 4\text{ cm}, \overline{BC} = 6\text{ cm}, \angle B = 50^\circ$	1개	$\overline{AB} = 6\text{ cm}, \overline{CA} = 5\text{ cm}, \angle B = 100^\circ$	0개
$\overline{AB} = 6\text{ cm}, \overline{BC} = 5\text{ cm}, \angle A = 40^\circ$	2개	$\overline{BC} = 6\text{ cm}, \overline{CA} = 7\text{ cm}, \angle C = 35^\circ$	1개
과제 카드 3		과제 카드 4	
주어진 조건	만들어진 삼각형 개수	주어진 조건	만들어진 삼각형 개수
$\overline{AB} = 5\text{ cm}, \overline{BC} = 4\text{ cm}, \angle B = 105^\circ$	1개	$\overline{BC} = 7\text{ cm}, \overline{CA} = 6\text{ cm}, \angle B = 45^\circ$	2개
$\overline{CA} = 7\text{ cm}, \overline{AB} = 5\text{ cm}, \angle C = 60^\circ$	0개	$\overline{CA} = 5\text{ cm}, \overline{AB} = 3\text{ cm}, \angle A = 75^\circ$	1개



Algeomath 링크

<https://www.algeomath.kr/algeo/algeomath/app/view?id=84ab467b9421b629382f3b37add20d4f>

과제 카드1		
주어진 조건	$\overline{AB} = 4\text{ cm}, \overline{BC} = 6\text{ cm}, \angle B = 50^\circ$	$\overline{AB} = 6\text{ cm}, \overline{BC} = 5\text{ cm}, \angle A = 40^\circ$
만들어진 삼각형의 개수	1개 	2개

- 모둠 내에서 삼각형의 모양과 크기가 하나로 정해지는 조건들을 모아서 그 공통점을 찾아봅시다.

$\overline{AB} = 4\text{ cm}, \overline{BC} = 6\text{ cm}, \angle B = 50^\circ$ $\overline{AB} = 5\text{ cm}, \overline{BC} = 4\text{ cm}, \angle B = 105^\circ$
 $\overline{BC} = 6\text{ cm}, \overline{CA} = 7\text{ cm}, \angle C = 35^\circ$ $\overline{CA} = 5\text{ cm}, \overline{AB} = 3\text{ cm}, \angle A = 75^\circ$

<공통점>

주어진 각이 모두 두 변 사이에 있었다. 각이 두 변 사이에 있지 않으면 삼각형이 두 개가 되거나 만들어지지 않았다.

3 위 활동에서 찾은 '숨은 단서'를 정리해 봅시다.

오늘 발견한 숨은 단서!

삼각형의 모양과 크기가 하나로 정해지기 위한 두번째 숨은 단서는
두 변의 길이와 그 끼인각의 크기가 주어지는 것 이다!



활동 개관

모둠별로 각자 과제 카드 하나를 선택하여 AlgeoMath를 이용해 주어진 조건(두 변의 길이와 한 각)에 맞는 삼각형을 작도한다. 만들어지는 삼각형의 개수를 확인하고, 삼각형이 하나만 만들어지는 조건들의 공통점을 찾아 삼각형이 하나로 작도되기 위한 숨은 단서를 탐색한다.



개발 의도

1차시에서 두 변의 길이와 한 각이 주어졌을 때 삼각형이 항상 하나로 결정되지 않는다는 결과를 확인한 학생들이, 그 원인을 스스로 탐색하도록 설계한 활동이다. 학생들은 AlgeoMath를 활용하여 다양한 조건에서 삼각형을 작도하고, 하나, 두 개 또는 만들어지지 않는 경우를 비교하며 공통점을 찾아본다. 이러한 탐색 과정을 통해 삼각형이 하나로 결정되는 조건을 스스로 발견하고, 이후 이를 수학적 개념으로 일반화하도록 한다.



발문

- "삼각형이 하나만 만들어진 카드들은 무엇이었나요?"
- "원을 그렸을 때 반직선과 만나는 교점은 몇 개인가요?"
- "삼각형이 하나만 만들어진 카드들을 모아 보면 어떤 공통점이 있나요?"
- "주어진 각은 두 변의 어디에 있었나요?"
- "두 변과 한 각이 주어졌는데 그 각이 끼인각이 아니라면, 항상 삼각형이 하나로 결정되지 않을까요?"
- "혹시 예외적으로 하나만 만들어지는 특별한 경우는 있을까요?"



지도상의 유의점 및 대응 방안

- 학생들이 AlgeoMath에서 작도할 때에는 컴퍼스(원) 도구를 사용하여 주어진 변의 길이를 반지름으로 하는 원을 그리고, 주어진 각은 반직선으로 나타내도록 지도한다. 원이 반직선과 만나는 교점의 개수에 따라 삼각형이 0개, 1개, 2개 만들어지는 과정을 직접 관찰하게 하여, 작도 결과의 차이를 시각적으로 이해하도록 한다.
- 교사가 먼저 끼인각이나 SAS 합동 조건을 제시하지 않는다. 학생들이 삼각형이 하나만 만들어지는 경우를 비교하며 공통점을 스스로 찾을 수 있도록 한다.
- 학생들이 탐색 1에서 찾은 단서(한 변의 길이)와 탐색 2에서 찾은 단서(두 변 사이에 있는 각)를 [나만의 탐정 규칙]에 자신의 언어로 정리하도록 한다. 이후 모둠별 발표와 공유를 통해 서로의 생각을 비교하고, 교사는 학생들의 표현을 바탕으로 '두 변 사이에 있는 각'을 '끼인각'이라는 수학적 용어로 정리한다.

미션

작도의 비밀, 단 하나의 삼각형을 만드는 ‘숨은 단서’를 찾아라!

탐정: _____



< 탐정미션 3. ‘삼각형의 작도’ 전문가가 되어라! >

문제상황 지난 시간까지 학습한 내용을 돌아보며 아래 문제를 해결해 봅시다.

- 1 주어진 각 조건에서 삼각형의 모양과 크기가 하나로 정해지는지 판단하고, 알지오매스로 직접 그려서 확인해 봅시다.

번호	주어진 조건	삼각형의 모양과 크기가 하나로 정해지는가?	
		나의 판단	확인 결과
1	$\overline{AB} = 4\text{ cm}, \overline{BC} = 5\text{ cm}, \angle B = 50^\circ$	☒ 예 ☐ 아니오	☒ 예 ☐ 아니오
2	$\overline{AB} = 4\text{ cm}, \angle A = 70^\circ, \angle B = 50^\circ$	☒ 예 ☐ 아니오	☒ 예 ☐ 아니오
3	$\overline{AB} = 4\text{ cm}, \overline{BC} = 5\text{ cm}, \angle A = 50^\circ$	☐ 예 ☒ 아니오	☒ 예 ☐ 아니오



Algeomath 링크

<https://www.algeomath.kr/algeo/algeomath/app/view?id=441910f25d0ee302de29fdb0814e2352>

번호	주어진 조건	삼각형의 모양과 크기가 하나로 정해지는가?
3	$\overline{AB} = 4\text{ cm}, \overline{BC} = 5\text{ cm}, \angle A = 50^\circ$	1개

- 2 나의 판단과 확인 결과가 다른 것이 있다면 무엇인지 쓰고 왜 그런지 생각해 봅시다.

3번($\overline{AB} = 4\text{ cm}, \overline{BC} = 5\text{ cm}, \angle A = 50^\circ$)

주어진 각이 주어진 두 변이 끼인 각이 아니라서 하나로 결정되지 않는다고 생각했다.



활동 개관

세 가지 삼각형의 조건(SAS, ASA, SSA)이 주어졌을 때 각각 삼각형이 하나로 작도될지 먼저 예상하여 판단해 보고 Algeomath를 활용하여 직접 그려보면서 자신의 예상과 실제 결과를 비교한다.



개발 의도

1~2차시를 통해 학생들이 스스로 발견한 삼각형의 결정 조건을 확인하며 자신의 이해를 점검하도록 설계한 활동이다. 학생들은 SAS(1번), ASA(2번)에 대해서는 확실히 삼각형이 하나로 결정된다고 판단할 것이고, SSA(3번)에 대해서는 하나로 결정되지 않는다고 판단할 것으로 예상된다. 즉 1, 2번을 통해서는 기존의 오개념이 수정되었는지 스스로 점검하는 것이며, 3번을 통해서는 새로운 오개념을 표면 위로 띄울 수 있게 되는 것이다. 두 변과 한 각의 크기가 주어졌을 때, 그 한 각은 반드시 끼인각이어야지만 삼각형이 하나로 결정된다는 오개념은 Algeomath를 활용하여 직접 그려보기 전까지는 확인하기 쉽지 않다. 즉 학생들은 구체적인 조작 활동을 통해 자신이 학습한 내용에 대한 확인과 자신이 가졌던 오개념을 확인하게 된다. 이러한 탐구 과정을 통해 학생들이 자신의 생각을 수정·확장하며 삼각형의 결정 조건을 보다 깊이 이해하도록 한다.



발문

"이 조건만으로 삼각형의 모양과 크기가 하나로 정해질지 먼저 예상해 볼까요?"

"여러분의 예상과 Algeomath로 확인한 결과가 같았나요?"

"예상과 다르게 나온 경우가 있었나요? 어떤 조건이었나요?"

"왜 그런 차이가 생겼을까요?"



지도상의 유의점 및 대응 방안

- 1~3번 조건을 판단하는 과정을 짝 또는 모둠원과 함께 토론하며 빈칸을 채우도록 지도한다. 어려움을 겪는 학생이 있다면, 먼저 개념을 이해한 학생이 자신의 생각과 근거를 설명하며 자연스럽게 동료 멘토 역할을 하도록 유도한다.
- 3번(SSA)의 작도에서 어려움을 겪을 수 있으므로, 순회 지도하며 돕는다.

탐색

2차시에서 찾은 숨은 단서 외에, 두 변의 길이와 한 각의 크기가 주어졌을 때 우리가 찾지 못한 숨은 단서가 있는지 찾아봅시다.

1

모둠별로 한 사람당 과제 카드를 하나씩 선택해서 알지오매스를 이용하여 삼각형을 각각 그려보고, 주어진 조건을 만족하는 삼각형이 몇 개 만들어지는지 적어 봅시다.

과제 카드 1		과제 카드 2	
주어진 조건	만들어진 삼각형개수	주어진 조건	만들어진 삼각형개수
$\overline{CA} = 5\text{ cm}, \overline{AB} = 6\text{ cm}, \angle C = 65^\circ$	1개	$\overline{CA} = 6\text{ cm}, \overline{AB} = 4\text{ cm}, \angle C = 70^\circ$	0개
$\overline{AB} = 7\text{ cm}, \overline{CA} = 6\text{ cm}, \angle B = 40^\circ$	2개	$\overline{BC} = 5\text{ cm}, \overline{CA} = 7\text{ cm}, \angle B = 80^\circ$	1개
과제 카드 3		과제 카드 4	
주어진 조건	만들어진 삼각형개수	주어진 조건	만들어진 삼각형개수
$\overline{BC} = 6\text{ cm}, \overline{CA} = 5\text{ cm}, \angle B = 50^\circ$	2개	$\overline{CA} = 5\text{ cm}, \overline{AB} = 6\text{ cm}, \angle C = 50^\circ$	1개
$\overline{AB} = 5\text{ cm}, \overline{BC} = 6\text{ cm}, \angle A = 55^\circ$	1개	$\overline{AB} = 7\text{ cm}, \overline{BC} = 5\text{ cm}, \angle A = 65^\circ$	0개



Algeomath 링크

<https://www.algeomath.kr/algeo/algeomath/app/view?id=0dbdcdbd42d67d7c6aee0735d22f75674>

과제 카드1		
주어진 조건	$\overline{CA} = 5\text{ cm}, \overline{AB} = 6\text{ cm}, \angle C = 65^\circ$	$\overline{AB} = 7\text{ cm}, \overline{CA} = 6\text{ cm}, \angle B = 40^\circ$
만들어진 삼각형의 개수	1개 	2개

과제 카드2		
주어진 조건	$\overline{CA} = 6\text{ cm}, \overline{AB} = 4\text{ cm}, \angle C = 70^\circ$	$\overline{BC} = 5\text{ cm}, \overline{CA} = 7\text{ cm}, \angle B = 80^\circ$
만들어진 삼각형의 개수	0개 	1개

- 2 삼각형의 모양과 크기가 하나로 정해지는 경우들을 모아 공통점을 찾아봅시다.

<삼각형이 1개로 정해지는 경우 모으기>

$$\begin{array}{ll} \overline{CA} = 5\text{ cm}, \overline{AB} = 6\text{ cm}, \angle C = 65^\circ & \overline{BC} = 5\text{ cm}, \overline{CA} = 7\text{ cm}, \angle B = 80^\circ \\ \overline{AB} = 5\text{ cm}, \overline{BC} = 6\text{ cm}, \angle A = 55^\circ & \overline{CA} = 5\text{ cm}, \overline{AB} = 6\text{ cm}, \angle C = 50^\circ \end{array}$$

<공통점을 문장으로 정리>

두 변의 길이와 끼인각이 아닌 한 각이 주어졌을 때, 주어진 각이 둘 중 긴 변의 대각이었다.

- 3 알지오매스에서 변의 길이와 각의 크기를 조정해 가면서 삼각형의 모양과 크기가 하나로 정해지는 또 하나의 숨은 단서를 찾아봅시다.



Algeomath 링크

<https://www.algeomath.kr/algeo/algeomath/app/view?id=3f6d64265c2fe5be73897dea8dc0628>



오늘 발견한 숨은 단서!

삼각형의 모양과 크기가 하나로 정해지기 위한 세번째 숨은 단서는

두 변의 길이와 둘 중 긴 변의 대각의 크기가 주어지는 것 이다!



활동 개관

AlgeoMath를 활용하여 직접 작도한 결과를 확인하고, 자신의 예상과 실제 결과를 비교한다. 이어 SSA 조건에서 다양한 각의 크기를 변화시키며 탐구하여, 삼각형이 하나로 결정되는 경우가 있는지 탐색해 본다.



개발 의도

과제 카드에는 두 변의 길이와 한 각의 크기가 주어진 상황이 제시된다. 이때, 모든 상황은 끼인각이 아닌 각이 주어지게 되는데, 그 중에서 삼각형이 하나로 정해지는 경우가 있고, 그렇지 않은 경우가 있다. 이를 AlgeoMath를 활용하여 그려보고 삼각형이 하나로 정해지는 조건들의 공통점을 탐색하며 새로운 삼각형의 결정 조건을 찾아보도록 한다.



발문

"지난 시간에 원과 반직선이 만나는 점의 개수로 삼각형이 몇 개 만들어지는지 확인했었죠? 이번에도 AlgeoMath에서 각과 두 변의 길이를 바꿔가면서, 원과 반직선이 딱 한 점에서만 만나는 경우들을 모아 보세요."

"그렇게 모든 경우들을 보면서, 두 변 AB, BC의 길이에 어떤 관계가 있는지 살펴보세요."

"하나의 삼각형이 만들어진 경우들을 서로 비교해 보면 어떤 공통점이 있나요?"

"그 공통점을 한 문장으로 정리해 볼까요?"



지도상의 유의점 및 대응 방안

- 발문만으로 방향을 잡기 어려워하는 학생이 있다면, 한 번에 하나의 값만 바꾸어 보게 한다. 예를 들어 AB, BC의 길이는 고정된 채 각의 크기만 조금씩 바꾸어 보게 하고, 원과 반직선의 교점이 1개가 되는 순간과 그때 AB, BC 중 어느 쪽이 더 긴지를 표로 기록하도록 안내한다.
- SSA 조건에서 하나의 삼각형이 결정되는 이유를 엄밀하게 증명하기보다는, 공학 도구를 활용하여 다양한 경우를 직접 탐색하고 비교하면서 규칙을 발견하고 일반화하는 경험에 초점을 둔다.
- SSA에서는 마지막 단계에서 주어진 변의 길이를 반지름으로 하는 원과 각의 한 변인 반직선의 교점을 찾아야 한다. 이때 원과 반직선의 위치 관계에 따라 교점이 0개, 1개 또는 2개가 될 수 있으므로, 삼각형이 만들어지지 않거나 하나 또는 두 개의 삼각형이 만들어질 수 있다. 따라서 여러 사례를 비교하여 주어진 각이 두 주어진 변 중 더 긴 변의 대각인 경우에는 삼각형이 하나로 결정됨을 발견하도록 지도한다. 여기서 '긴 변'은 삼각형 전체의 가장 긴 변이 아니라, SSA에서 주어진 두 변 중 길이가 더 긴 변을 뜻한다. 학생들에게는 "다른 조건들은 작도 순서가 정해지면 삼각형이 하나로 결정되지만, SSA는 마지막에 원과 반직선의 교점을 확인해야 하는 특별한 경우"라고 설명할 수 있다.

정리 지금까지 배운 내용들을 정리해 봅시다.

1 우리가 냈었던 오답들에 대한 처방전을 만들어 봅시다.

오답 처방전

1 두 변의 길이와 한 각의 크기만 알면 항상 하나의 삼각형이 만들어진다.

→ 왜 오답일까? 두 변의 길이와 한 각의 크기가 주어져도, 주어진 각이 어디에 있는지에 따라 삼각형이 두 개 만들어지거나 만들어지지 않는 경우도 있기 때문이다.

→ 올바른 설명 두 변의 길이와 한 각의 크기로 하나의 삼각형이 결정되는 경우도 있고, 결정되지 않는 경우도 있다.

2 두 각의 크기와 한 변의 길이만 알면 항상 하나의 삼각형이 만들어진다.

→ 왜 오답일까? 두 각과 한 변이라고만 하면 어떤 변인지가 정해져 있지 않다. 따라서 어떤 변이 주어지느냐에 따라 각의 크기는 같지만 크기가 다른 삼각형이 만들어질 수 있다.

→ 올바른 설명 한 변의 길이와 그 양 끝 각의 크기가 주어지면 하나의 삼각형이 결정된다.

3 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기가 주어진 경우에만 하나의 삼각형이 만들어진다.

→ 왜 오답일까? 끼인각이 아니어도 주어진 각이 두 주어진 변 중 더 긴 변의 대각인 경우에는 하나의 삼각형이 만들어지는 경우가 있기 때문이다.

→ 올바른 설명 두 변의 길이와 끼인각의 크기가 주어지면 하나의 삼각형이 결정된다.
또한 두 변의 길이와 한 각의 크기가 주어졌을 때에도, 주어진 각이 두 주어진 변 중 더 긴 변의 대각인 경우에는 하나의 삼각형이 결정될 수 있다.

2 지금까지 배운 내용을 정리하여 단 하나의 삼각형을 만드는 나만의 탐정 규칙을 적어 봅시다.

나만의 탐정 규칙

단 하나의 삼각형을 만들기 위해서는

- ① 세 변의 길이가 모두 주어져야 한다. .
- ② 한 변의 길이와 그 양 끝 각의 크기가 주어져야 한다. .
- ③ 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기가 주어져야 하며, 끼인각이 아닐 때에는 주어진 각이 두 주어진 변 중 더 긴 변의 대각이면 하나로 작도될 수 있다. .

그것이 바로 우리가 찾던 '숨은 단서'이다!



활동 개관

지금까지 학습한 내용을 정리하며, 오개념들을 정리하고 올바른 설명에 대해 생각해 보며 적어본다. 또한 삼각형의 모양과 크기가 정해지는 조건을 정리한다.



개발 의도

지금까지 배운 내용을 학생 스스로의 언어로 정리하는 과정이다. 1차시에서 가졌던 오개념을 돌아보고, 탐색과 수정 과정을 통해 자신의 생각이 어떻게 변화했는지(RISE)를 성찰하며 학습 내용을 마무리한다.



발문

"지금까지 우리가 당연하다고 생각했지만 틀렸던 것은 무엇이었나요?"

"두 변과 한 각, 두 각과 한 변처럼 조건이 세 개라는 것만으로 삼각형이 하나로 결정된다고 할 수 있을까요?"

"삼각형을 딱 하나로 결정하는 진짜 조건은 무엇이었나요? 나만의 탐정 규칙으로 정리해 볼까요?"



지도상의 유의점 및 대응 방안

- 수업 마무리 단계에서는 활동지의 「오답 처방전」과 「나만의 탐정 규칙」을 작성하도록 안내한다.
- 학생들이 1차시에서 가졌던 오개념을 돌아보고, 탐색과 수정 과정을 통해 자신의 생각이 어떻게 변화했는지(RISE)를 성찰하며 학습 내용을 정리하도록 지도한다.