오답의 재발견

기본 도형

교사용 지도서

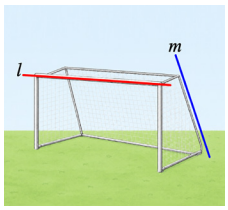
미션

꼬인 위치의 비밀, 두 직선의 위치 관계를 밝히는 '숨은 단서'를 찾아라!

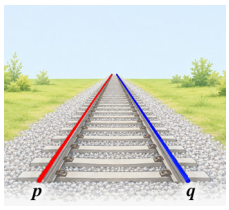
탐정: _____

< 탐정 미션 1. 맞았을까, 틀렸을까? >

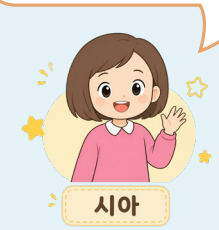
다음은 두 직선의 위치 관계에 대한 세 학생의 의견입니다. 세 학생의 의견에 대한 여러분의 생각을 정하고, 그 이유도 같이 말해봅시다.

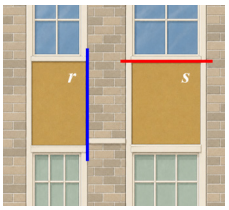


두 직선 l, m은 한 점에서 만날 것 같아.
따라서 직선 l과 직선 m은
꼬인 위치에 있지 않아.



두 직선 p, q는 평행해.
따라서 직선 p와 직선 q는
꼬인 위치에 있지 않아.





두 직선 r, s는 서로 만나지 않아.
따라서 직선 r과 직선 s는
꼬인 위치에 있어.

나의 생각

- 민수의 생각에 (동의한다. / 동의하지 않는다.) 왜냐하면 두 직선 l, m은 한 점에서 만나지 않기 때문이다.
  또한 직선 l 과 직선 m은 꼬인 위치에 있다.
- 시아의 생각에 (동의한다. / 동의하지 않는다.) 왜냐하면 기찻길의 양쪽 선로인 두 직선 p, q는 평행하기 때문이다.
- 준영의 생각에 (동의한다. / 동의하지 않는다.) 왜냐하면 두 직선 r, s는 서로 만나기 때문이다.
  따라서 직선 r과 직선 s는 꼬인 위치에 있지 않다.

활동 개관

세 가지 실생활 장면을 제시하고, 두 직선의 위치 관계에 대한 학생들의 의견을 살펴보며 자신의 판단을 표현하게 한다.

개발 의도

본 활동은 학생들이 꼬인 위치를 처음 접할 때 나타날 수 있는 다양한 오개념을 자연스럽게 드러내기 위한 것이다. 학생들은 꼬인 위치에 대해 다음과 같이 생각할 수 있다. "그림에서 두 직선을 연장하면 만날 것 같으므로 꼬인 위치가 아니다.", "그림에서 두 직선이 만나지 않으므로 꼬인 위치이다." 그러나 공간에서 두 직선의 위치 관계를 판단할 때는 단순히 그림에서 두 직선이 만나는지만 확인해서는 충분하지 않다. 두 직선이 같은 평면에 있는지, 그림에서 보이는 모습과 실제 공간에서의 위치가 일치하는지를 함께 살펴보아야 한다.

따라서 이 활동에서는 교사가 꼬인 위치 개념을 다시 설명하고 학생들의 오개념을 즉시 교정하기보다, 학생들이 자신의 판단 근거를 말하고 서로의 생각을 비교하도록 하여 이후 입체도형 속 모서리의 위치 관계를 탐색할 수 있는 출발점을 마련한다.

발문

"입체도형을 평면에 나타낸 그림에서 보이는 모습만으로 두 직선의 위치 관계를 판단해도 될까요?"

"각 모서리를 연장한 두 직선이 그림에서 한 점에서 만나는 것처럼 보인다면, 실제 공간에서도 만날까요?"

"그림에서 두 직선이 비스듬하게 보인다는 이유만으로 실제로 만난다고 할 수 있을까요?"

"그림에서 비슷한 방향으로 보이는 두 직선은 실제로 평행하다고 할 수 있을까요?"

"각 모서리를 연장한 두 직선이 그림에서 만나지 않으면 항상 꼬인 위치에 있다고 할 수 있을까요?"

"입체도형을 다른 방향에서 바라보면 두 직선의 위치 관계가 다르게 보일 수도 있을까요?"

지도상의 유의점 및 대응 방안

- 학생이 오답을 제시하더라도 교사는 즉시 "틀렸다."라고 수정하거나, 직선을 연장하여 확인하는 방법과 같은 해결 방법을 처음부터 제시하지 않는다. 먼저 학생이 어떤 근거로 그렇게 판단했는지 설명하도록 하고, 학생들의 다양한 판단 기준을 확인한다.

- 학생이 그림에서 두 직선이 만나지 않는다는 이유만으로 꼬인 위치에 있다고 판단하는 경우, 그림에서 보이는 모습과 실제 공간에서의 위치 관계가 다를 수 있음을 생각하도록 한다. 각 모서리를 연장한 두 직선이 실제 공간에서 만나는지, 평행한지 등을 확인하도록 유도한다.

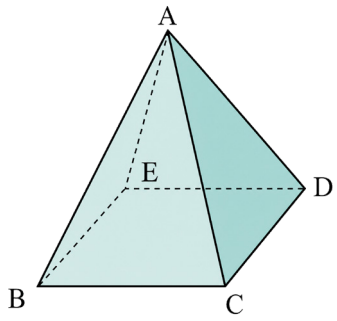
- 학생이 그림에서 두 직선이 교차하는 것처럼 보이면 실제로 만난다고 판단하는 경우, 입체도형을 평면에 나타낸 그림과 실제 공간을 구분하도록 한다. 그림에서 교차해 보이는 것이 실제 공간에서 두 직선이 한 점에서 만나는 것을 의미하는지 스스로 점검하도록 한다.

- 학생이 그림에서 비슷한 방향으로 보이는 두 직선을 평행하다고 판단하는 경우, 그림에서 보이는 방향과 실제 공간에서의 평행 여부를 구분하도록 한다. 각 모서리를 연장한 두 직선의 위치 관계를 생각하여 판단하도록 유도한다.

- 이 활동에서는 학생들이 꼬인 위치를 어떤 기준으로 판단하고 있는지 확인하는 데 중점을 둔다. 학생들의 다양한 의견을 충분히 듣고, 교사가 정답이나 판단 기준을 먼저 제시하기보다 이후 활동을 통해 자신의 판단을 스스로 재검토하도록 유도한다.

문제 상황 1 다음 문제를 해결해 봅시다.

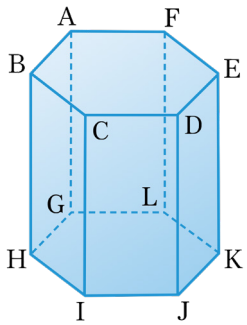
1 다음 그림은 밑면이 정사각형인 사각뿔입니다. 사각뿔에서 각 모서리를 연장한 직선에 대한 설명이 옳으면 O표, 옳지 않으면 X표 하세요.



1. 직선 AD와 직선 BE는 한 점에서 만난다. (X)

2. 직선 AB와 꼬인 위치에 있는 직선은 직선 CD와 직선 DE 뿐이다. (O)

2 다음 그림은 밑면이 정육각형인 육각기둥입니다. 육각기둥에서 각 모서리를 연장한 직선에 대한 설명이 옳으면 O표, 옳지 않으면 X표 하세요.



1. 직선 AB와 평행한 직선은 직선 GH뿐이다. (X)

2. 직선 BC와 직선 DJ는 꼬인 위치에 있다. (O)

활동 개관

사각뿔과 육각기둥 그림에서 제시된 모서리를 연장한 두 직선의 위치 관계를 판단하고, 그 이유를 설명하게 한다.

개발 의도

학생들에게 익숙한 입체도형을 활용하여 모서리를 연장한 두 직선의 위치 관계를 어떻게 판단하고 있는지 확인하기 위한 활동이다.
입체도형을 평면에 나타낸 겨냥도는 실제 공간의 모습을 완전히 보여 주지 못하므로, 학생들은 다음과 같은 오류를 범할 수 있다.

- 그림에서 교차해 보이는 두 모서리를 실제로 만난다고 생각한다.
- 보이지 않는 뒤쪽의 모서리를 고려하지 않는다.
- 두 모서리가 만나지 않으면 항상 꼬인 위치에 있다고 판단한다.
- 입체도형의 모서리와 그 연장선을 구분하지 못한다.

이 활동은 학생들이 입체도형을 한 방향에서만 바라보는 데 그치지 않고, 모서리를 직선으로 생각하여 위치 관계를 판단하도록 하기 위한 것이다. 특히 평면 그림에서 보이는 모습과 실제 공간에서의 위치 관계가 다를 수 있음을 경험하도록 구성하였다.

발문

"어떤 답을 선택했나요?"

"그렇게 생각한 이유는 무엇인가요?"

"두 직선이 한 점에서 만나는지 어떻게 확인할 수 있을까요?"

"두 직선이 만나는 점이 있을까요?"

"두 직선이 만나지 않을 때는 어떤 위치 관계가 있을 수 있을까요?"

"두 직선이 서로 평행한지 어떻게 확인할 수 있을까요?"

"직선 AB와 같은 방향으로 뻗어 있는 직선을 모두 찾아볼 수 있을까요?"

"두 직선이 만나지 않는다고 해서 항상 꼬인 위치에 있다고 할 수 있을까요?"

"두 직선이 같은 평면에 있다면 꼬인 위치라고 할 수 있을까요?"

"그림에서 보이는 두 직선의 모습만으로 위치 관계를 판단해도 될까요?"

"입체도형을 다른 방향에서 바라보면 두 직선의 위치 관계가 다르게 보일 수도 있을까요?"

지도상의 유의점 및 대응 방안

- 학생들이 두 직선의 위치 관계를 판단할 때는 두 직선이 한 점에서 만나는지, 평행한지, 꼬인 위치에 있는지를 각각의 근거를 확인하며 판단하도록 지도한다. 직선 AB와 평행한 직선을 찾을 때도 그림에서 같은 방향으로 보이는 직선 하나만 찾는 데 그치지 않고, 다른 직선들과 위치 관계를 비교하여 평행한 직선을 모두 찾아보도록 한다.

- 학생들이 꼬인 위치에 있는 직선을 찾을 때 일부 직선만 찾거나 모든 직선을 정확하게 분류하지 못할 때는 두 직선의 위치 관계를 단계적으로 확인하도록 지도한다. 먼저 두 직선이 만나는지 확인하고, 만나지 않는 경우 평행한지 살펴본 후, 평행하지 않다면 같은 평면에 있는지를 확인하게 하여 위치 관계를 체계적으로 판단하도록 한다.

- 학생들이 겨냥도에 나타난 두 직선의 모습만으로 위치 관계를 판단할 때는 입체도형을 다른 방향에서 바라보았을 때도 같은 판단을 할 수 있는지 생각해 보도록 한다. 필요한 경우 실제 모형이나 공학적 도구 등을 활용하여 입체도형을 여러 방향에서 관찰하고 두 직선의 위치 관계를 비교하도록 한다.

- 이 단계에서는 모든 직선의 위치 관계를 정확하게 분류하는 것보다, 두 직선의 위치 관계를 판단하는 기준을 찾아 적용하는 과정에 중점을 둔다.

문제 상황 2

1 다음은 밑면이 정오각형인 오각기둥에 대한 네 컷 만화입니다. 네 학생의 의견에 대한 여러분의 생각을 정하고, 그 이유도 말해봅시다.

나의 생각

- 도윤의 생각에 (동의한다. / 동의하지 않는다.) 왜냐하면 직선 BC 와 직선 DE 는 한 점에서 만난다.
  그러므로 두 직선은 꼬인 위치에 있지 않기 때문이다.
- 민경의 생각에 (동의한다. / 동의하지 않는다.) 왜냐하면 직선 BC 와 직선 IJ 는 평행하지 않다.
  또한 두 직선은 꼬인 위치에 있기 때문이다.
- 서준의 생각에 (동의한다. / 동의하지 않는다.) 왜냐하면 직선 BC 와 직선 DI 는 서로 만나지 않는다.
  또한 두 직선은 꼬인 위치에 있기 때문이다.
- 채원의 생각에 (동의한다. / 동의하지 않는다.) 왜냐하면 직선 BC 와 직선 AF 는 서로 만나지 않는다.
  또한 두 직선은 꼬인 위치에 있기 때문이다.

2 네 컷 만화에서 한 장면을 골라, 틀린 의견을 낸 학생을 도울 수 있는 설명을 적어 봅시다.

내가 고른 장면: (1) 컷

내가 고른 장면	예시 답변
2컷	"두 직선의 방향이 비슷해 보인다고 해서 평행이라고 할 수는 없어. 두 직선이 같은 평면에 있으면서 만나지 않아야 평행이야."
3컷	"두 직선을 연장하면 만날 것처럼 보여도 실제 공간에서는 만나지 않아. 두 직선은 꼬인 위치에 있어."
4컷	"겨냥도에서는 실제로 만나지 않는 두 직선도 교차하는 것처럼 보일 수 있어. 그림에서 교차하는 것처럼 보인다고 해서 실제로 만난다고 판단해서는 안 돼."

활동 개관

네 컷 만화 속 네 학생의 생각을 살펴보고 각 생각의 옳고 그름과 그 근거를 설명하게 하여, 모서리를 연장한 두 직선의 위치 관계를 판단할 때 나타날 수 있는 다양한 오개념을 파악하고 분석하게 한다. 또한 네 컷 중 한 장면을 선택하여, 잘못 생각한 학생이 자기 생각이 왜 잘못되었는지 이해할 수 있도록 모서리를 연장한 두 직선의 위치 관계를 판단하는 근거를 설명하게 한다.

개발 의도

본 활동은 학생들이 자신의 오개념을 다른 인물의 생각을 통해 객관적으로 바라보고, 위치 관계를 판단할 때 자신이 어떤 기준을 사용하고 있는지 점검하도록 하기 위한 것이다. 네 컷 만화 속 인물의 판단이 옳은지 판단하고 그 근거를 설명하는 과정에서 다양한 오개념을 발견하고, '왜 그렇게 생각했을까?'라는 질문을 통해 잘못된 판단의 원인을 추론하게 한다. 이를 통해 오개념을 단순한 오류로 여기기보다, 자신의 사고 과정을 돌아보고 올바른 판단 기준을 탐색하는 출발점으로 인식하도록 한다.

특히 '만나지 않으면 꼬인 위치이다', '방향이 비슷하면 평행이다.', '그림에서 교차하면 실제로도 만난다'와 같은 판단을 제시하여, 학생들이 평면 그림에 나타난 모습이나 시각적 특징에 의존하여 공간에서 두 직선의 위치 관계를 잘못 판단할 수 있음을 드러내고자 한다. 나아가 잘못 생각한 학생에게 자신의 판단이 왜 잘못되었는지 이해할 수 있도록 설명하는 과정에서, 두 직선의 위치 관계를 정확하게 판단하기 위해 확인해야 할 기준을 스스로 정리하도록 한다.

발문

"학생의 의견에 동의하나요, 동의하지 않나요? 그렇게 생각한 이유는 무엇인가요?"

"그 학생은 두 직선의 위치 관계를 어떻게 판단했을까요?"

"두 직선이 그림에서 만나지 않는다고 해서 꼬인 위치에 있다고 할 수 있을까요?"

"두 직선이 한 점에서 만나는지 어떻게 확인할 수 있을까요?"

"직선 BC와 직선 DE는 실제 공간에서 한 점에서 만날까요?"

"두 직선이 만나지 않는다면, 평행인지 꼬인 위치에 있는지 어떻게 구분할 수 있을까요?"

"두 직선이 평행하려면 어떤 조건을 만족해야 할까요?"

"겨냥도에서 두 직선이 만나는 것처럼 보인다고 해서 실제 공간에서도 만난다고 할 수 있을까요?"

"겨냥도에서 보이는 두 직선의 모습과 실제 공간에서의 위치 관계가 항상 같을까요?"

"입체도형을 평면에 나타내면서 실제 공간에서의 위치 관계가 다르게 보일 수도 있을까요?"

"이 학생은 그림의 어떤 모습 때문에 그렇게 생각했을까요?"

"이 학생이 자기 생각을 바꿀 수 있도록 어떻게 설명해 줄 수 있을까요?"

지도상의 유의점 및 대응 방안

- 학생들이 '동의한다.', '동의하지 않는다'만 표시하고 판단의 근거를 충분히 설명하지 못할 때는, 자신이 선택한 의견의 근거를 말이나 글로 표현하도록 지도한다. 이때 다른 학생의 의견을 단순히 맞고 틀린 것으로 판단하기보다, 잘못된 판단이 어떤 생각에서 비롯되었는지 살펴보도록 한다. 특히 두 직선이 만나지 않는다는 이유만으로 꼬인 위치라고 판단하거나, 두 직선의 방향이 비슷해 보인다는 이유만으로 평행하다고 판단할 때는 위치 관계를 판단하기 위해 무엇을 확인해야 하는지 생각하도록 한다.

- 학생들이 그림에서 두 직선이 만나지 않는 모습만 보고 꼬인 위치라고 판단할 때는 '만나지 않는다'라는 것만으로는 위치 관계를 결정할 수 없음을 생각하도록 지도한다. 두 직선이 만나지 않는 경우 평행인지 꼬인 위치인지 구분하기 위해 두 직선의 방향과 같은 평면에 있는지를 확인하도록 한다. 특히 두 직선이 평행하려면 같은 평면에 있으면서 만나지 않아야 한다는 점을 스스로 확인하도록 한다.

- 학생들이 두 직선의 방향이 비슷해 보이는 것만으로 평행하다고 판단할 때는 그림에서 보이는 방향과 실제 공간에서의 위치 관계를 구분하도록 지도한다. 두 직선의 방향이 비슷해 보이는지에만 주목하지 않고, 두 직선이 같은 평면에 있으면서 만나지 않는지 확인하도록 한다. 이를 통해 시각적으로 비슷해 보이는 것과 실제로 평행한 것은 다를 수 있음을 이해하도록 한다.

- 학생들이 겨냥도에서 두 직선이 만나거나 교차하는 것처럼 보이는 모습을 실제 공간에서의 위치 관계로 그대로 받아들일 때는, 겨냥도가 입체도형을 평면에 나타낸 그림이라는 점을 인식하도록 지도한다. 그림에서 두 직선이 만나거나 교차하는 것처럼 보이더라도 실제 공간에서는 만나지 않을 수 있음을 생각하게 하고, 두 직선의 위치 관계를 그림의 시각적인 모습만으로 판단하지 않도록 한다.

- 학생들이 네 컷 만화 속 인물의 오개념을 분석할 때는 단순히 "틀리게 생각했다."라고 판단하는 데 그치지 않고, 왜 그렇게 생각했는지를 그 학생의 관점에서 생각해 보도록 한다. 이를 통해 학생들이 직선의 위치 관계를 판단할 때 생길 수 있는 오개념을 구체적으로 이해하도록 한다. 또한 틀린 의견을 낸 학생에게 설명하는 활동에서는 자신의 설명에 판단 근거가 드러나도록 하며, 두 직선이 만나는지, 평행한지, 같은 평면에 있는지 등을 확인하여 위치 관계를 판단하도록 안내한다.

3 지금까지의 활동을 통해 알게 된 '꼬인 위치'에 대한 생각을 적어 봅시다.

탐정 메모

나는 지금까지의 활동을 통해 입체도형의 그림에서 보이는 모습만으로 두 직선의 위치 관계를 판단해서는 안 된다는 것을 알게 되었다. 각 모서리를 연장한 직선을 생각하고, 두 직선이 평행한지, 한 점에서 만나는지 확인해야 하며, 두 직선이 같은 평면에 있는지도 살펴보아야 한다는 것을 알게 되었다.

활동 개관

1차시를 마무리하며 꼬인 위치에 대해 처음에 가지고 있던 생각과 활동을 통해 달라진 생각을 [탐정 메모] 에 스스로 적어보게 한다. 이를 통해 학생들이 자기 생각이 어떻게 변화했는지 돌아보고, 꼬인 위치를 판단할 때 중요하게 확인해야 할 기준을 스스로 정리하도록 한다. 다음과 같은 발문을 활용하여 학생들의 생각 변화를 확인한다.

개발 의도

학생들이 꼬인 위치에 대해 처음 가지고 있던 생각과 오개념을 스스로 점검하고, 이를 글로 표현하며 자기 생각을 명확하게 정리하도록 돕는다. 또한 친구나 활동지 속 인물의 오개념을 살펴보는 과정에서, 꼬인 위치를 판단할 때 그림에 나타난 모습만으로 판단해서는 안 된다는 점을 이해하도록 한다. 두 직선이 실제로 만나는지, 평행한지, 같은 평면에 있는지 등 위치 관계를 판단할 때 확인해야 할 요소를 생각해 보게 하여, 자신의 판단 기준을 구체화하고 다음 차시의 탐구 활동에 대한 필요성을 느끼도록 한다.

발문

"지금까지의 활동을 통해 꼬인 위치에 대해 새롭게 알게 된 점은 무엇인가요?"

"오늘 여러분은 실생활 장면과 입체도형 그림을 살펴보면서 그림에 보이는 모습만으로 두 직선의 위치 관계를 판단하기 어려울 수 있다는 것을 알게 되었습니다. 그렇다면 두 직선이 서로 평행한지, 꼬인 위치에 있는지 정확하게 판단하려면 무엇을 확인해야 할까요?"

지도상의 유의점 및 대응 방안

- 학생들이 '꼬인 위치', '평행' 등의 수학적 용어를 정확하게 사용하지 못하더라도 자기 생각을 자유롭게 표현하도록 격려한다. 위치 관계를 정확하게 판단하는 것보다, 활동을 통해 어떤 점을 새롭게 알게 되었고 자기 생각이 어떻게 구체화되었는지 설명하는 데 중점을 둔다.

- 학생들이 작성한 [탐정 메모]를 발표하고 서로의 생각을 비교·공유하도록 한다. 같은 그림이나 상황을 보고도 서로 다른 판단을 할 수 있음을 확인하고, 자신의 판단과 다른 의견이 나온 이유와 그 근거를 생각해 보도록 한다. 이를 통해 앞선 활동에서 살펴본 내용을 스스로 정리하고, 꼬인 위치에 대한 자기 생각을 구체화하도록 한다.

- 1차시에서는 평행, 한 점에서 만남, 꼬인 위치의 정의를 형식적으로 정리하는 데 지나치게 집중하지 않도록 한다. 학생들이 두 직선의 위치 관계를 판단할 때 어떤 단서를 확인해야 하는지 스스로 돌아보도록 하는 것에 중점을 둔다. 활동을 통해 확인한 학생들의 혼란이나 개념적 부족을 다음 차시의 탐구와 연결하여, 입체도형을 여러 방향에서 살펴보며 '같은 평면에 있는가'라는 단서를 탐색하고 꼬인 위치의 개념을 점차 정교화하도록 한다.

미션

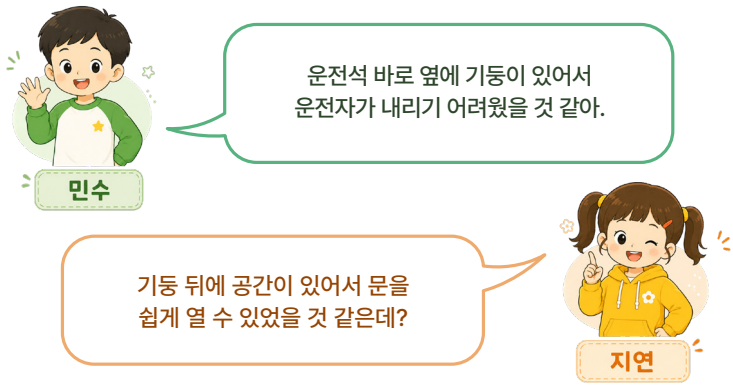
꼬인 위치의 비밀, 두 직선의 위치 관계를 밝히는 '숨은 단서'를 찾아라!

탐정: _____

< 탐정 미션 2. 숨은 단서를 찾아라! >

탐색 1 입체도형을 여러 방향에서 보며 두 직선의 위치 관계를 판단하는 방법을 찾아봅시다.

1 다음 두 학생의 의견을 보고 누가 옳은지 확인할 방법을 생각해 봅시다.



- 자동차를 오른쪽에서 본 모습을 확인한다.

- 기둥 뒤쪽에 서서 자동차를 본 모습을 확인한다.

활동 개관

앞에서 본 모습만으로는 운전석 문이 기둥에 걸려 열릴지 열리지 않을지 확인하기 쉽지 않은 상황을 바탕으로 운전석 문과 기둥의 위치를 확인하려면 어떻게 해야 할지 모둠별로 생각을 나누게 한다.

개발 의도

1차시에서 학생들은 공간에서 두 직선의 위치 관계를 판단할 때 그림에 보이는 모습만으로 판단하면 오답이 발생할 수 있음을 확인하였다. 2차시에서는 초등학교에서 사물을 위, 앞, 옆에서 본 모양과 쌓기나무로 탐구했던 경험을 떠올려, 한 방향에서 본 모습만으로 파악하기 어려운 공간 관계를 여러 방향에서 살펴보도록 한다. 이를 통해 학생들이 공간 감각에만 의존하지 않고, 관찰 방향을 의도적으로 선택하여 두 직선의 위치 관계를 판단하는 첫 번째 숨은 단서를 찾도록 한다.

발문

"앞에서 본 모습만으로 위치를 파악하기 어려울 때, 어떻게 하면 좋을까요?"

"초등학교에서 쌓기나무를 관찰할 때는 어떤 방향에서 보았나요?"

"앞에서 본 모습 말고 필요한 것은 무엇일까요?"

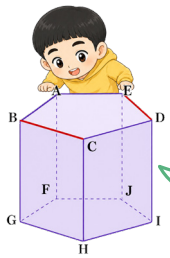
"어느 방향에서 보면 좋을까요?"

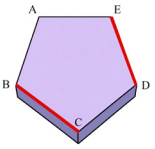
지도상의 유의점 및 대응 방안

- 차를 타고 내릴 때를 떠올리며 이야기하는 학생들의 다양한 반응을 통해 한 방향에서 본 모습만으로는 자동차의 문과 기둥의 위치를 정확하게 판단할 수 없음을 느낄 수 있도록 하고, 무엇이 필요한지 학생 스스로 떠올릴 수 있도록 한다.

- 교사가 정답을 직접 말하기보다 학생들이 스스로 다른 방향에서 본 모습을 확인해야 함을 자연스럽게 알 수 있도록 하는 것에 초점을 둔다. 이를 바탕으로 위치 관계를 파악할 때도 다른 방향에서 본 모양을 생각해 볼 수 있도록 유도하며 다음 활동으로 연결한다.

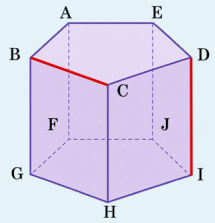
2 현수는 그림과 같이 오각기둥에서 각 모서리를 연장한 직선의 위치 관계를 알아보기 위해 오각기둥을 위에서 보았습니다. 오각기둥을 여러 방향으로 돌려 보면 모서리를 연장한 두 직선이 각각 어떻게 보일지 생각해 봅시다.



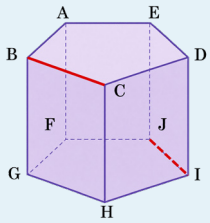


면 ABCDE가 정면으로 보이도록 오각기둥을 위에서 보면, $\overleftrightarrow{BC}$와 $\overleftrightarrow{DE}$가 한 점에서 만난다는 것을 쉽게 알 수 있어.

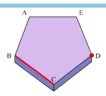
1



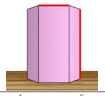
2



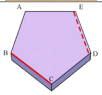
예시) ① 면 ABCDE 를 정면으로 본 모양에서 두 직선은 방향이 다르고, 만나지 않는다.



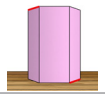
면 BGHC 를 정면으로 본 모양에서 두 직선은 방향이 다르다.



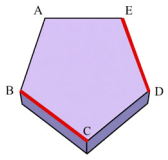
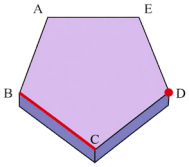
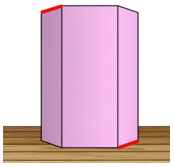
② 면 ABCDE 를 정면으로 본 모양에서 두 직선의 방향이 다르다.



면 CHID 를 정면으로 본 모양에서 두 직선은 만나지 않는다.



3 짝지어진 두 직선의 위치 관계를 판단하기 위해 어느 면을 정면으로 보면 좋을지 생각해 보고 표를 완성해 봅시다.

두 직선	정면으로 본 면	이때 보이는 모습	두 직선의 위치 관계
$\overleftrightarrow{BC}$와 $\overleftrightarrow{DE}$	면 ABCDE		한 점에서 만난다.
$\overleftrightarrow{BC}$와 $\overleftrightarrow{DI}$	면 ABCDE		꼬인 위치에 있다.
$\overleftrightarrow{BC}$와 $\overleftrightarrow{IJ}$	면 CHID		꼬인 위치에 있다.

4 위 활동에서 찾은 '숨은 단서'를 정리해 봅시다.

오늘 발견한 숨은 단서!

입체도형에서 두 직선의 위치 관계를 판단하는 첫 번째 숨은 단서는

입체도형을 여러 방향에서 본 모습 이다.

활동 개관

오각기둥을 다양한 방향으로 돌려보며 오각기둥의 모서리를 연장한 두 직선의 위치 관계를 판단하려면 어떤 면을 정면으로 보면 좋을지 생각해 보게 한다. 위치 관계를 판단하기 위해 정면으로 본 면을 선택한 후, 이때 두 직선이 보이는 모습에서 알 수 있는 사실을 찾아 두 직선의 위치 관계를 판단하게 한다. 이후 한 면을 정면으로 봤을 때 두 직선이 보이는 모습에서 위치 관계에 대해 알 수 있는 사실을 정리하며 숨은 단서를 탐색한다.

개발 의도

교과서나 학습지에서 보는 입체도형은 특정한 한 방향에서 본 겨냥도를 그린 것이다. 위치 관계의 판단에서 발생하는 오개념 중 하나는 도형을 입체적으로 생각하지 않고 눈에 보이는 대로 판단하는 것으로, 하나의 겨냥도만 보고 이를 입체적으로 상상하기를 힘들어하는 학생들이 많다. 초등학교 교육과정에서도 마찬가지로 쌓기나무에 대해 파악할 때, 한 방향에서 본 모양을 보고 파악하는 것이 아니라 위, 앞, 옆과 같이 다양한 방향에서 쌓기나무를 본 모양을 통해 전체적인 모양을 입체적으로 파악한다. 공간에서 두 직선의 위치 관계를 파악할 때도 하나의 모양만 보고 바로 두 직선의 위치 관계를 파악하기보다 다른 방향에서 본 모양을 떠올려 두 직선의 위치 관계를 파악할 수 있는 단계를 만들어주고자 한다. 학생들이 공간에서의 위치 관계를 학습할 때, 위치 관계에 따라 두 직선이 만나는지 만나지 않는지, 한 평면 위에 있는지 한 평면 위에 있지 않은지에 대해 학습하였다. 한 면을 정면으로 본 모양 등 여러 방향에서 두 직선을 본 모양을 생각했을 때, 두 직선이 만나는지 만나지 않는지, 방향이 같은지 다른지, 완전히 겹쳐볼 수 있는 한 방향이 있는지에 따라 두 직선의 위치 관계를 파악할 수 있는 단서를 찾도록 설계하였다.

발문

"두 직선이 만나지 않는지 확인하려면 어느 방향에서 보면 될까요?"

"두 직선을 겹쳐 볼 수 있는 방향이 있을까요?"

"두 직선이 향하는 방향이 같은지 다른지 확인할 수 있는 방향이 있나요?"

"한 방향에서 보이는 두 직선의 모양이 만나지 않는 경우, 두 직선의 위치 관계로 가능한 것은 무엇인가요?"

"두 직선을 겹쳐 볼 수 있다면 두 직선의 위치 관계로 가능한 것은 무엇이 있나요?"

"한 방향에서 보이는 두 직선의 방향이 다른 경우, 두 직선의 위치 관계로 가능한 것은 무엇이 있나요?"

지도상의 유의점 및 대응 방안

- 한 면을 정면으로 본 모양을 상상하기 힘들어 하는 학생들에게 오각기둥 모형이나 AlgeoMath 3D를 이용하여 오각기둥을 직접 돌려보며 두 직선이 여러 방향에서 어떻게 보이는지 확인하게 할 수 있다.

- 두 직선이 만나지 않는지, 방향이 다른지, 한 평면 위에 있는지를 위치 관계와 연결하여 위치 관계를 판단할 단서를 얻을 수 있도록 한다. 각 직선에 대해 한 면을 정면으로 바라본 모양으로 위치 관계를 확인하는 방법은 다음과 같다.

두 직선	위치 관계를 확인하는 방법
$\overleftrightarrow{BC}$ 와 $\overleftrightarrow{DE}$	- 면 ABCDE를 정면에서 본 모양에서 두 직선은 오각형의 두 변의 연장선으로 나타난다. 두 직선의 방향이 다르게 나타나므로 두 직선은 평행하지 않다. - 옆면을 정면으로 본 모양에서 두 직선은 겹쳐볼 수 있으므로 두 직선은 한 평면 위에 있고, 평행하지 않으므로 두 직선은 한 점에서 만난다.

$\overleftrightarrow{BC}$ 와 $\overleftrightarrow{DI}$	- 옆면을 정면으로 본 모양에서 두 직선은 방향이 다르게 나타나므로 두 직선은 평행하지 않다. - 면 ABCDE를 정면으로 본 모양에서 두 직선은 만나지 않고 방향이 다르게 나타나므로, 두 직선은 만나지 않고 평행하지 않다. 즉, 두 직선은 꼬인 위치에 있다.
$\overleftrightarrow{BC}$ 와 $\overleftrightarrow{IJ}$	- 옆면을 정면으로 본 모양에서 두 직선은 평행하게 나타나므로 만나지 않는다. - 면 ABCDE를 정면으로 본 모양에서 두 직선은 방향이 다르게 나타나므로 평행하지 않다. 또한 두 직선은 만나지 않으므로 두 직선은 꼬인 위치에 있다.

- 이 활동은 공간에서 두 직선의 위치 관계를 판단하는 것을 단계적으로 생각할 수 있도록 도움을 주는 것을 목표로 한다. 따라서 임의의 도형에서 두 모서리를 연장한 직선의 위치 관계를 파악할 수 있는 방법을 만드는 것에 목표를 두지 않고, 한 방향에서 본 모양을 학생들이 스스로 위치 관계를 판단할 수 있는 단서로 활용할 수 있도록 공간감각을 키워주는 것에 초점을 둔다.

- 한 방향에서 본 모양에 대해 논리적으로 정리한다면 다음과 같이 서술할 수 있다.

"한 방향에서 본 모양에서 두 직선이 만나지 않으면 공간에서도 두 직선은 만나지 않는다. 따라서 두 직선은 평행하거나 꼬인 위치에 있다."

"한 방향에서 본 모양에서 두 직선이 방향이 다르면 두 직선은 평행하지 않다. 따라서 두 직선은 한 점에서 만나거나 꼬인 위치에 있다."

"한 방향에서 본 모양에서 두 직선을 겹쳐 볼 수 있으면 두 직선은 한 평면 위에 있다. 따라서 두 직선은 한 점에서 만나거나 평행하다."

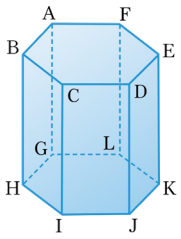
이와 같이 완전히 정리된 설명이 아니더라도 학생들이 나름의 표현을 사용하여 자신이 발견한 단서를 설명할 수 있도록 한다.

- 위치 관계를 확인하기 위한 단서를 찾을 때, 한 방향에서 본 두 직선이 만나지 않으면 공간에서도 만나지 않고, 방향이 다르면 공간에서 방향이 다르다. 다만 이러한 명제의 역은 일반적으로 성립하지 않으므로 학생들이 잘못 일반화하지 않도록 한다. 한 방향에서 두 직선이 만나 보이더라도 실제 공간에서는 만나지 않는 꼬인 위치에 있을 수 있고, 같은 방향으로 보이더라도 다른 방향에서는 두 직선의 방향이 다르게 보일 수 있다.

- 학생들이 찾은 방법을 자신의 표현으로 나눌 수 있도록 한다. 이후 모둠별 발표와 공유를 통해 서로의 생각을 비교하고, 교사는 학생들의 표현을 바탕으로 두 직선의 위치 관계를 판단하는 숨은 단서를 적을 수 있도록 지도한다.

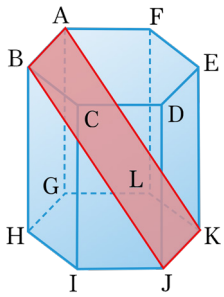
탐색 2 두 직선을 모두 포함하는 평면을 찾아 위치 관계를 판단하는 다른 방법을 알아봅시다.

1 다음 그림은 밑면이 정육각형인 육각기둥입니다. 육각기둥에서 각 모서리를 연장한 직선에 대해 짝지어진 두 직선의 위치 관계를 판단하고, 두 직선을 포함하는 평면이 있는지 확인해 봅시다.



두 직선	두 직선의 위치 관계	두 직선을 모두 포함하는 평면
$\overleftrightarrow{AB}$ 와 $\overleftrightarrow{EF}$	한 점에서 만난다.	☑ 있음 면 ABCDEF ☐ 없음
$\overleftrightarrow{AB}$ 와 $\overleftrightarrow{DE}$	평행하다.	☑ 있음 면 ABCDEF ☐ 없음
$\overleftrightarrow{AB}$ 와 $\overleftrightarrow{DJ}$	꼬인 위치에 있다.	☐ 있음 _____ ☑ 없음
$\overleftrightarrow{AB}$ 와 $\overleftrightarrow{IJ}$	꼬인 위치에 있다.	☐ 있음 _____ ☑ 없음

2 $\overleftrightarrow{AB}$ 와 $\overleftrightarrow{JK}$ 의 위치 관계를 판단하고, 두 직선을 모두 포함하는 평면이 있는지 알아봅시다. 만약, 두 직선을 모두 포함하는 평면이 있다면 이를 그림에 나타내어 봅시다.



- 두 직선은 서로 평행하다.
- 네 점 A, B, J, K를 지나는 평면은 두 직선을 모두 포함한다.

3 두 직선을 모두 포함하는 평면이 있는 경우, 가능한 두 직선의 위치 관계는 무엇인지 말해봅시다.

두 직선을 모두 포함하는 평면이 있는 경우 두 직선은 서로 평행하거나, 한 점에서 만난다.

4 두 직선을 모두 포함하는 평면이 없는 경우, 가능한 두 직선의 위치 관계는 무엇인지 말해봅시다.

두 직선을 모두 포함하는 평면이 없는 경우, 두 직선은 꼬인 위치에 있다.

5 위 활동에서 찾은 '숨은 단서'를 정리해 봅시다.

오늘 발견한 숨은 단서!

입체도형에서 두 직선의 위치 관계를 판단하는 두 번째 숨은 단서는 두 직선을 모두 포함하는 평면의 유무 이다.

활동 개관

육각기둥의 모서리를 연장한 두 직선의 위치 관계를 판단한 후, 두 직선을 모두 포함하는 평면이 있는지 없는지 확인한다. 다면체의 면 외에도 두 직선을 모두 포함하는 평면이 있는 경우 이를 찾아본다. 두 직선을 모두 포함하는 평면의 유무에 따른 두 직선의 위치 관계를 확인하여 두 직선의 위치 관계를 판단하는 숨은 단서를 탐색한다.

개발 의도

학생들은 꼬인 위치에 있는 두 직선을 동시에 포함하는 평면이 없다는 사실을 알고 있어도, 이를 실제 위치 관계를 판단하는 데 활용하는 데에는 어려움을 겪을 수 있다. 이 활동에서는 도형 전체를 막연하게 바라보기보다 두 직선을 모두 포함하는 평면이 있는지 먼저 확인하도록 하여, 공간에서의 위치 관계를 보다 체계적으로 판단하게 한다. 두 직선을 모두 포함하는 평면이 있으면 그 평면 위의 두 직선으로 생각하여 한 점에서 만나는지 또는 서로 평행한지를 판단할 수 있고, 그러한 평면이 없으면 두 직선이 꼬인 위치에 있음을 판단할 수 있다. 이를 통해 '두 직선을 모두 포함하는 평면의 유무'를 공간에서 두 직선의 위치 관계를 판단하는 두 번째 숨은 단서로 활용하도록 한다.

발문

"한 직선이 포함된 다면체의 면 중 다른 직선도 포함하는 면은 무엇인가요?"

"다면체의 면 외에도 두 직선을 모두 포함하는 평면이 있을까요?"

"두 직선의 위치 관계 중 두 직선을 모두 포함하는 평면이 있는 것은 무엇인가요?"

"두 직선의 위치 관계 중 두 직선을 모두 포함하는 평면이 없는 것은 무엇인가요?"

"두 직선을 모두 포함하는 평면이 있는 경우 불가능한 위치 관계는 무엇인가요?"

"발견한 단서가 위치 관계를 파악하는 데 어떤 도움이 되나요?"

지도상의 유의점 및 대응 방안

- 두 직선을 모두 포함하는 평면을 찾기 힘들어하는 학생은 두 모서리를 연장한 직선을 공통으로 포함한 평면을 찾을 때, 한 모서리가 포함된 다면체의 두 면을 먼저 찾은 후 다른 모서리도 포함하는지 확인하게 할 수 있다.

- 두 직선을 모두 포함하는 평면이 있다면, 입체도형 전체에서 위치 관계를 파악하기보다 한 평면 위의 두 직선으로 생각하여 위치 관계를 보다 쉽게 판단할 수 있도록 지도한다.

- 문제 2번과 같이 평행한 두 직선의 경우 다면체의 면 외에 두 직선을 모두 포함하는 평면이 있다. 학생에 따라 평면을 다면체의 면으로만 한정하여 생각하거나 찾더라도 평면인지 확인하기 힘들어할 수 있는데, 이때는 두 직선 위의 네 점을 이은 선분(위 문제에서는 선분 AK와 선분 BJ)을 그려본 후 확인하도록 안내한다.

- 교사가 먼저 방법을 제시하지 않고, 학생들이 두 직선을 모두 포함하는 평면을 찾은 후 위치 관계를 생각해 보도록 하여 유용성을 느끼고 이를 숨은 단서로 활용할 수 있도록 한다.

- 학생들이 찾은 단서를 자신의 언어로 정리하도록 한다. 이후 모둠별 발표와 공유를 통해 서로의 생각을 비교하고, 교사는 학생들의 표현을 바탕으로 두 직선의 위치 관계를 판단하는 숨은 단서를 적을 수 있도록 지도한다.

미션

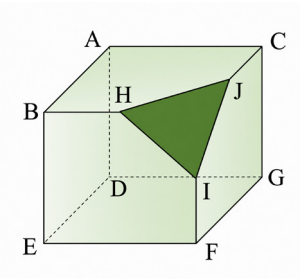
꼬인 위치의 비밀, 두 직선의 위치 관계를 밝히는 '숨은 단서'를 찾아라!

탐정: _____

< 탐정 미션 3. '위치 관계' 전문가가 되어라! >

문제 상황 지난 시간까지 학습한 내용을 돌아보며 다음 문제를 해결해 봅시다.

1 다음 그림은 직육면체를 세 점 H, I, J를 지나는 평면으로 잘라낸 입체도형입니다. 이 입체도형에서 모서리를 연장한 직선 중 세 개를 선택하고, 선택한 직선과 $\overleftrightarrow{BH}$의 위치 관계를 알아 봅시다.



선택한 직선	두 직선의 위치 관계	
	나의 판단	확인 결과
직선 _____	☐ 한 점에서 만난다 ☐ 평행하다 ☐ 꼬인 위치에 있다	☐ 한 점에서 만난다 ☐ 평행하다 ☐ 꼬인 위치에 있다
직선 _____	☐ 한 점에서 만난다 ☐ 평행하다 ☐ 꼬인 위치에 있다	☐ 한 점에서 만난다 ☐ 평행하다 ☐ 꼬인 위치에 있다
직선 _____	☐ 한 점에서 만난다 ☐ 평행하다 ☐ 꼬인 위치에 있다	☐ 한 점에서 만난다 ☐ 평행하다 ☐ 꼬인 위치에 있다

직선 BH와 한 점에서 만나는 직선	직선 AB, 직선 BE, 직선 HI, 직선 HJ, 직선 CJ, 직선 IF
직선 BH와 평행한 직선	직선 AC, 직선 DG, 직선 EF
직선 BH와 꼬인 위치에 있는 직선	직선 AD, 직선 DE, 직선 CG, 직선 FG, 직선 IJ

2 나의 판단과 확인 결과가 다른 것이 있다면, 어떤 점을 잘못 보았거나 어떤 '숨은 단서'를 놓쳤는지 써 봅시다.

처음에는 직선 CJ가 직선 BH와 만나지 않는다고 판단하였다. 모서리로 보이는 부분만 보고, 두 직선을 양쪽으로 연장하면 잘려 나간 원래의 꼭짓점에서 만난다는 사실을 놓쳤기 때문이다. 처음에는 직선 DG와 직선 BH가 꼬인 위치에 있다고 판단하였다. 두 직선을 모두 포함하는 평면을 입체도형의 면에서 찾지 못했기 때문이다. 그러나 입체도형의 면이 아니더라도 두 직선을 모두 포함하는 평면이 있으므로 두 직선은 서로 평행하다.

활동 개관

직육면체의 한 꼭짓점을 잘라 만든 입체도형에서 직선 BH를 제외한 모서리의 연장선 중 세 개를 선택하여, 선택한 각 직선과 직선 BH의 위치 관계를 먼저 판단하게 한다. 이후 입체도형을 여러 방향에서 살펴보거나 두 직선을 모두 포함하는 평면을 찾아 자신의 판단을 확인하게 한다. 나의 판단과 확인 결과가 다른 경우에는 어떤 점을 잘못 보았거나 어떤 '숨은 단서'를 놓쳤는지 기록하게 한다.

개발 의도

1차시와 2차시에서 학생들이 찾은 두 가지 '숨은 단서'인 ①입체도형을 여러 방향에서 본 모습과 ②두 직선을 모두 포함하는 평면의 유무를 새로운 입체도형에 적용하여 자신의 이해를 점검하고 성찰하게 하는 수업이다.

문제상황으로 제시된 입체도형에는 모서리로 보이는 부분은 만나지 않지만 연장한 직선은 입체도형 밖에서 만나는 경우, 서로 평행하지만 두 직선을 모두 포함하는 평면이 입체도형의 겉면으로 드러나지 않는 경우, 한 방향에서 본 모습만으로는 판단하기 어려운 꼬인 위치의 경우가 함께 포함되어 있다. 특히 직선 BH와 직선 CJ 또는 직선 IF는 잘려 나간 원래의 꼭짓점에서 만나므로, 모서리와 모서리를 연장한 직선을 구분하지 못하는 학생의 오개념을 확인하기에 적절하다.

학생들이 먼저 자신의 판단을 기록한 뒤 확인 결과와 비교하게 함으로써, 모서리의 보이는 부분에만 주목하거나 평면을 입체도형의 겉면으로만 생각하는 오개념이 남아 있는지 스스로 점검하도록 한다. 이는 앞선 차시에서 발견한 단서를 실제 판단 규칙으로 적용하고, 자신의 판단을 스스로 수정하고 확장할 기회를 제공한다.

발문

"모서리로 보이는 부분만 보지 않고, 두 직선을 양쪽으로 연장해 보았나요?"

"두 직선을 연장하면 입체도형의 바깥에서 만날 수도 있을까요?"

"어느 방향에서 보면 두 직선이 만나지 않는지 또는 방향이 같은지를 더 분명하게 확인할 수 있을까요?"

"두 직선을 모두 포함하는 평면이 있나요? 그 평면은 반드시 입체도형의 겉면이어야 하나요?"

"나의 판단과 확인 결과가 달랐다면 어떤 '숨은 단서'를 놓친 것인가요?"

지도상의 유의점 및 대응 방안

- 직선 BH를 선택한 학생이 있을 때는 두 직선이 같아 일치하게 된다고 설명하고, 직선 BH 외의 다른 직선을 다시 선택하게 지도한다. 가능하면, 학생들이 서로 다른 위치 관계들이 골고루 선택해 보도록 안내한다.

- '확인 결과'는 교사가 정답을 알려 주어 옮겨 적게 하는 것이 아니라, 실제 모형이나 공학적 도구로 도형을 여러 방향에서 살펴보거나 두 직선을 모두 포함하는 평면을 찾아 근거를 확인한 결과가 되도록 한다.

- 직선 CJ 또는 직선 IF를 선택한 학생이 두 직선이 만나지 않는다고 판단하면, 현재 보이는 모서리만 생각한 것인지 모서리를 양쪽으로 연장한 직선을 생각한 것인지 확인한다. 잘려 나가기 전의 원래 직육면체를 떠올리거나 잘려 나간 꼭짓점을 복원하여 생각하도록 안내한다.

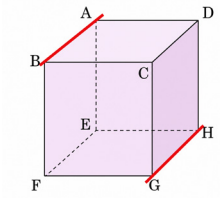
- 직선 DG와 직선 BH처럼 서로 평행하지만 두 직선을 모두 포함하는 평면이 입체도형의 겉면으로 나타나지 않는 경우에는, 평면이 반드시 다면체의 겉면일 필요는 없음을 확인하게 한다.

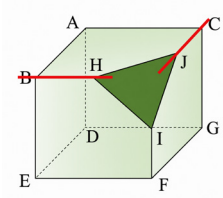
- 학생이 두 직선의 방향이 비슷해 보인다는 이유만으로 평행하다고 판단하면, 두 직선을 모두 포함하는 평면이 있는지도 함께 확인하게 한다.

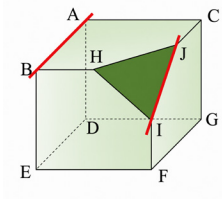
- 판단과 확인 결과가 다른 학생에게 정답을 바로 제시하기보다, 판단이 일치한 학생이 자신이 활용한 숨은 단서와 판단 근거를 설명하도록 하여 자연스럽게 동료 멘토 역할을 하게 한다.

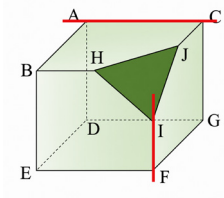
탐색 두 직선의 위치 관계를 잘못 판단하게 되는 이유를 생각해 보고, 지금까지 찾은 '숨은 단서'를 보완해 봅시다.

1 모둠별로 한 사람당 과제 카드를 하나씩 선택해서 두 직선의 위치 관계를 잘못 판단하는 경우의 예를 그림이나 글로 제시하고, 잘못 판단하는 이유를 적어 봅시다.

과제 카드 1		
잘못 판단하는 경우	예	잘못 판단하는 이유
서로 평행하지만 꼬인 위치라고 잘못 판단하는 경우		입체도형에서 직선 AB와 직선 HG를 포함하는 면을 찾을 수 없기 때문에 꼬인 위치라고 잘못 판단할 수 있다.

과제 카드 2		
잘못 판단하는 경우	예	잘못 판단하는 이유
한 점에서 만나는데 만나지 않는다고 잘못 판단하는 경우		그림만 보고 직선 BH와 직선 CJ가 만나지 않는다고 생각하여, 꼬인 위치라고 잘못 판단할 수 있다.

과제 카드 3		
잘못 판단하는 경우	예	잘못 판단하는 이유
꼬인 위치이지만 서로 평행하다고 잘못 판단하는 경우		한 방향에서 두 직선이 비슷한 방향으로 보이는 모습만 보고 평행하다고 판단할 수 있다. 그러나 다른 방향에서 보면 두 직선의 방향이 다르고, 두 직선을 모두 포함하는 평면도 없다.

과제 카드 4		
잘못 판단하는 경우	예	잘못 판단하는 이유
꼬인 위치이지만 한 점에서 만난다고 잘못 판단하는 경우		겨냥도에서는 실제로 만나지 않는 두 직선도 교차하는 것처럼 보일 수 있다. 직선 AC와 직선 IF를 모두 포함하는 평면은 없으므로 두 직선은 실제 공간에서 만나지 않는다.

2 두 직선의 위치 관계를 정확히 판단하려면 무엇을 더 확인해야 하는지 생각해 봅시다.

직선은 그림에서 보이는 것보다 더 연장되어 있다는 것을 생각한다. 필요하면 입체도형을 여러 방향에서 살펴본다.

두 직선을 모두 포함하는 평면이 있는지 확인한다. 두 직선을 모두 포함하는 평면이 없으면 꼬인 위치에 있고,

그러한 평면이 있으면 한 점에서 만나는지 또는 서로 평행한지를 확인한다.

활동 개관

모둠별로 한 사람당 과제 카드 한 장씩을 선택하여, 제시된 방식으로 두 직선의 위치 관계를 잘못 판단할 수 있는 사례를 그림이나 글로 구성하게 한다. 만든 사례에서 어떤 수학적 정보를 놓쳤기 때문에 오답이 발생했는지 분석하고, 모둠원이 만든 여러 사례의 공통점을 찾아 정확한 판단을 위해 더 확인해야 할 내용을 정리하게 한다.

개발 의도

학생들이 이미 제시된 오답을 고치는 데 그치지 않고, 특정한 오답이 나타나는 사례와 그 원인을 직접 구성하도록 한 활동이다. 오답 사례를 만드는 과정에서 학생은 어떤 시각적 특징이나 불완전한 판단 기준이 오답을 유발하는지 구체적으로 생각하게 된다.

특히 오답의 원인을 단순히 '헷갈렸다', '실수했다'와 같이 설명하지 않고, 모서리의 보이는 부분만 보았는지, 한 방향의 그림에만 의존하였는지, 평면을 입체도형의 겉면으로만 생각하였는지, 두 직선을 모두 포함하는 평면을 확인하지 않았는지와 같이 수학적으로 분석하도록 한다. 모둠원들이 각자 만든 사례를 설명하고 비교하는 과정에서 서로의 판단 기준을 점검하고, 앞선 차시에서 찾은 숨은 단서를 더욱 정교한 판단 규칙으로 발전시키도록 한다.

발문

"이 학생은 그림에서 무엇을 보고 그렇게 판단했을까요?"

"모서리로 보이는 부분과 모서리를 연장한 직선을 구분했나요?"

"두 직선이 한 평면 위에 있지 않으면, 두 직선을 모두 포함하는 평면이 없다고 할 수 있을까요?"

"한 방향에서는 평행하거나 만나는 것처럼 보이더라도 다른 방향에서는 어떻게 보일까요?"

"이 오답을 고치려면 우리가 찾은 두 가지 숨은 단서 중 무엇을 활용해야 할까요?"

"네 가지 오답에서 공통적으로 놓친 점은 무엇인가요?"

지도상의 유의점 및 대응 방안

- 학생이 잘못 판단하는 이유를 단순히 "그림이 헷갈리기 때문이다." 또는 "부주의했기 때문이다."라고만 적지 않도록 한다. 그림의 어떤 모습에 주목하였고 어떤 정보를 확인하지 않았는지를 구체적으로 표현하게 한다.

- 학생이 만든 사례가 실제로 과제 카드의 조건을 만족하는지 확인한다. 예를 들어 과제 카드 1에서는 두 직선이 실제로 평행해야 하며, 과제 카드 3과 4에서는 두 직선이 실제로 꼬인 위치에 있어야 한다.

- 과제 카드 1에서는 서로 평행한 두 직선을 모두 포함하는 평면이 반드시 있다는 점을 확인하게 한다. 학생이 찾지 못한 것은 평면 자체가 아니라 입체도형의 겉면일 수 있음을 구분하도록 한다.

- 과제 카드 2에서는 모서리로 보이는 부분이 만나지 않더라도 연장한 직선은 입체도형의 바깥에서 만날 수 있음을 생각하게 한다.

- 과제 카드 3과 4에서는 한 방향의 그림에서 보이는 모습만으로 판단하지 않고, 다른 방향에서 본 모습과 두 직선을 모두 포함하는 평면의 유무를 확인하게 한다.

- 학생의 그림이 완벽한 겨냥도가 아니더라도 의도한 두 직선과 잘못 판단하게 되는 이유가 분명하면 인정한다. 그림이 정확한지 보다는 오답이 만들어지는 수학적 원인을 설명하는데 주목하게 한다.

정리 지금까지 배운 내용을 정리해 봅시다.

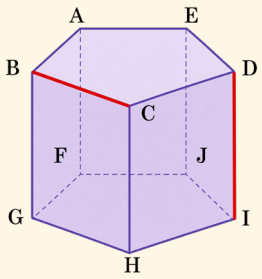
1 우리가 탐구한 여러 오답에 대한 처방전을 만들어 봅시다.

오답 처방전

1 두 직선은 만나지 않으면 항상 꼬인 위치이다.

→ 왜 오답일까?	만나지 않는 두 직선 중에는 서로 평행한 두 직선도 있기 때문이다.
→ 올바른 설명	만나지 않는 두 직선은 서로 평행하거나 꼬인 위치에 있다. 두 직선을 모두 포함하는 평면이 있으면 서로 평행하고, 그러한 평면이 없으면 꼬인 위치에 있다.

2 직선 BC와 직선 DI는 만난다.



→ 왜 오답일까?	그림을 한 방향에서 보면 만나는 것처럼 보일 수 있지만, 두 직선을 모두 포함하는 평면이 없다. 따라서 직선 BC와 직선 DI는 꼬인 위치에 있다.
→ 올바른 설명	직선 BC와 직선 DI는 서로 만나지 않으며 평행하지도 않다. 두 직선을 모두 포함하는 평면이 없으므로 꼬인 위치에 있다.

3 두 직선이 만나는 경우에만 한 평면 위에 있다.

→ 왜 오답일까?	평행한 두 직선도 한 평면 위에 있기 때문이다.
→ 올바른 설명	두 직선을 모두 포함하는 평면이 있으면 두 직선은 한 점에서 만나거나 평행하다. 두 직선을 모두 포함하는 평면이 없으면 두 직선은 꼬인 위치이다.

활동 개관

지금까지 탐구한 세 가지 오답이 왜 잘못되었는지 설명하고, 각 오답을 대신할 수 있는 올바른 설명을 작성하게 한다. 오답의 원인을 특정한 그림에만 한정하여 설명하지 않고, 공간에서 두 직선의 위치 관계를 판단할 때 적용할 수 있는 일반적인 기준으로 정리하도록 한다.

개발 의도

학생들이 1차시에서 드러낸 오개념과 2~3차시의 탐색 과정에서 확인한 오답을 자신의 언어로 수정하며 학습 내용을 구조화하도록 한 활동이다. '왜 오답인지'와 '올바른 설명'을 구분하여 작성하게 함으로써, 단순히 정답을 암기하는 것이 아니라 기존 판단의 어떤 부분이 불충분했는지 설명하고 이를 더 정확한 판단 기준으로 대체하도록 한다.

첫 번째 오답에서는 '만나지 않는다'는 정보만으로 평행과 꼬인 위치를 구분할 수 없음을, 두 번째 오답에서는 겨냥도에서 교차해 보이는 것과 실제 공간에서 만나는 것을 구분해야 함을, 세 번째 오답에서는 한 평면 위의 두 직선이 한 점에서 만나거나 평행할 수 있음을 정리하도록 한다.

발문

"이 문장이 틀렸다는 것을 보여 주는 예시를 제시할 수 있나요?"

"'만나지 않는다'는 정보만으로 두 직선의 위치 관계를 하나로 결정할 수 있을까요?"

"겨냥도에서 교차해 보이는 것과 실제 공간에서 만나는 것은 어떻게 다른가요?"

"두 직선을 모두 포함하는 평면이 있으면 어떤 위치 관계가 가능할까요?"

"특정한 그림에만 적용되는 설명이 아니라, 다른 입체도형에도 적용되는 문장으로 고쳐 볼 수 있을까요?"

지도상의 유의점 및 대응 방안

- '왜 오답일까?'에는 기존 문장의 잘못된 부분이나 빠진 조건이 드러나게 하고, '올바른 설명'에는 다른 상황에도 적용할 수 있는 일반적인 판단 기준이 드러나도록 한다.

- 학생이 "답이 꼬인 위치이기 때문이다."와 같이 결과만 적을 때에는, 어떤 조건을 확인하여 꼬인 위치라고 판단했는지 설명하게 한다.

- 첫 번째와 세 번째 오답은 모두 평행한 두 직선과 관련되어 있지만, 첫 번째는 만나지 않는 두 직선의 분류를, 세 번째는 두 직선을 모두 포함하는 평면의 유무를 다룬다는 차이를 확인하도록 한다.

- 학생들이 서로의 처방전을 읽고, 오답의 원인과 올바른 설명이 명확하게 연결되어 있는지 점검하게 할 수 있다.

2 지금까지 배운 내용을 정리하여 두 직선의 위치 관계를 판단하는 나만의 탐정 규칙을 적어 봅시다.

나만의 탐정 규칙

공간에서 두 직선의 위치 관계를 판단하려면

① 입체도형을 여러 방향에서 보며 두 직선이 보이는 모습을 확인한다 .

② 두 직선을 모두 포함하는 평면이 있는지 확인해야 한다 .

그것이 바로 우리가 찾던 '숨은 단서'이다!

활동 개관

1~3차시에서 탐구한 내용을 바탕으로 공간에서 두 직선의 위치 관계를 판단할 때 자신이 활용할 '나만의 탐정 규칙'을 작성하게 한다. 이후 자신이 만든 규칙을 새로운 두 직선에 적용하여 실제로 위치 관계를 판단하는 데 도움이 되는지 확인하게 한다.

개발 의도

학생들이 두 차시에서 발견한 두 가지 숨은 단서와 3차시에서 분석한 오답의 원인을 하나의 판단 규칙으로 통합하도록 한다. 학생들이 처음에 사용하였던 불완전한 판단 기준과 최종적으로 만든 규칙을 비교하면서 자신의 생각이 어떻게 변화하였는지 성찰하도록 한다.

'다른 방향에서 본 모습'과 '두 직선을 모두 포함하는 평면'이라는 두 가지 단서를 단순히 나열하는 데 그치지 않고, 모서리를 양쪽으로 연장한 직선을 생각해야 한다는 전제와 각각의 단서를 언제 어떻게 활용할 것인지를 자신의 언어로 표현하게 한다. 이를 통해 앞선 차시의 탐색 결과를 다른 입체도형과 두 직선에도 적용할 수 있는 일반적인 판단 전략으로 확장하도록 한다.

발문

"모서리로 보이는 부분만 보지 않으려면 가장 먼저 무엇을 생각해야 할까요?"

"한 방향의 그림만으로 판단하기 어려울 때에는 어떻게 해야 할까요?"

"두 직선이 만나지 않을 때, 평행인지 꼬인 위치인지 어떻게 구분할 수 있을까요?"

"두 직선을 모두 포함하는 평면이 없으면 어떤 위치 관계인가요?"

"1차시에서 사용했던 판단 방법과 지금 만든 규칙은 어떻게 달라졌나요?"

"여러분이 만든 규칙을 새로운 두 직선에도 적용할 수 있을까요?"

지도상의 유의점 및 대응 방안

- 학생들이 자신의 언어로 자유롭게 규칙을 표현하도록 하되, 모서리를 연장한 직선을 생각하는 것, 입체도형을 여러 방향에서 살펴보는 것, 두 직선을 모두 포함하는 평면을 확인하는 것이 빠지지 않았는지 점검한다.

- '다른 방향에서 본다.'는 표현만 적은 경우에는, 다른 방향에서 본 모양에서 두 직선이 만나는지, 방향이 같은지, 겹쳐 보이는지 등 무엇을 확인할 것인지 덧붙이게 한다.

- 한 방향에서 두 직선이 만나 보이면 실제로도 만난다거나, 같은 방향으로 보이면 실제로도 평행하다는 식으로 잘못 일반화하지 않도록 한다. 여러 방향에서 본 모습은 위치 관계를 판단하는 단서이며, 필요한 경우 두 직선을 모두 포함하는 평면의 유무를 함께 확인해야 한다.

- 학생들이 만든 규칙을 직선 BH와 새로운 직선 하나에 직접 적용하고, 판단 근거를 설명하도록 하여 규칙의 유용성을 확인하게 한다.

- 수업의 마지막에는 1차시에서 가졌던 생각, 탐색 과정에서 새롭게 발견한 단서, 최종적으로 만든 판단 규칙을 연결하여 자신의 생각이 어떻게 수정되고 확장되었는지 성찰하도록 한다.