

오답의 재발견

입체도형



교사용 지도서

미션

360도 회전의 비밀을 밝혀라!

탐정: _____



< 탐정 미션 1. 무엇이 맞을까? >

🔍 다음은 회전체를 회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면에 대한 두 학생의 의견입니다. 두 학생의 의견에 대한 여러분의 생각을 정하고, 그 이유도 적어 봅시다.



회전체를 회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면은 원 모양이야.



회전체를 회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면은 원 모양이 아닐 수도 있어.

🏠 나의 생각

- ▶ (민수의 생각에 동의한다. / 지연의 생각에 동의한다. / 민수와 지연이의 생각에 모두 동의하지 않는다.) 왜냐하면 회전체는 회전축을 중심으로 등글게 회전하여 만들어진 도형이므로 회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면은 원 모양이다.



활동 개관

회전체를 회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면에 대한 두 학생의 주장을 보고 자신의 생각을 정하고 그 이유를 작성한다.



개발 의도

회전체를 회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면의 모양에 대해 추측하게 한다. 학생들은 이 활동에서 회전체를 회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면이 항상 원 모양이라고 추측하여 '민수'의 생각에 동의하는 오답을 제시할 수 있다.



발문

"원기둥 모양의 음료수 캔 등 주변에서 쉽게 볼 수 있는 회전체를 위에서 똑바로 내려다 본다면 어떤 모양일까요?"

"다른 회전체를 위에서 똑바로 내려다본다면 어떤 모양일까요?"

"민수와 지연이의 의견 중 무엇에 동의하나요? 왜 그렇게 생각했나요?"



지도상의 유의점 및 대응 방안

- 학생들이 오답을 포함하여 자신의 생각을 자유롭게 표현하도록 허용적인 분위기를 조성한다.
- 학생들이 원기둥 등 전형적인 회전체만 떠올려 민수의 의견에 확신하더라도, 교사가 즉각적으로 정답을 제시하기보다는 이어지는 탐구 활동을 통해 학생 스스로 오개념을 발견하고 수정해 나갈 수 있도록 자연스럽게 유도한다.
- 자신의 생각을 글로 서술하기 어려워하는 학생에게는 머릿속에 떠오르는 단면의 모양을 간단한 그림으로 대신 표현하도록 안내하거나 구체물을 활용하여 활동에 참여할 수 있도록 한다.
- 이 단계에서 학생들이 제시한 오답과 그 이면의 오개념은 이후 [문제 상황 1]과 [문제 상황 2]를 거치며 스스로 개념을 재구성하는 '오답의 재발견' 과정의 밑거름이 된다. 따라서 학생들의 모든 초기 아이디어를 긍정적으로 수용하는 편안하고 허용적인 분위기를 조성한다.

문제 상황 1 다음을 해결해 봅시다.

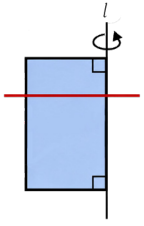
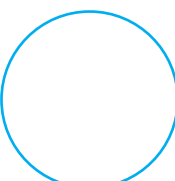
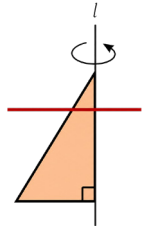
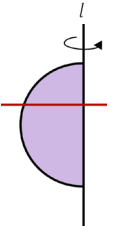
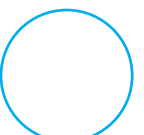
- 1 다음 평면도형을 직선 l 을 회전축으로 하여 1회전 시킬 때 생기는 회전체를 그려봅시다.

그림 1	그림 2	그림 3

- 2 '그림 1'에 대해 제시된 예시를 참고하여, 나머지 두 회전체를 회전축에 수직인 평면으로 자를 위치를 정하고, 그 위치에서 자를 때 생기는 단면을 그려봅시다.

그림 1		그림 2		그림 3	
(예시) 자를 위치	(예시) 단면	자를 위치	단면	자를 위치	단면

3 각 회전체를 2번과 다른 위치에서 회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면을 그려봅시다.

그림 1		그림 2		그림 3	
자를 위치	단면	자를 위치	단면	자를 위치	단면
					

4 2번과 3번에서 그린 단면의 모양에 공통으로 나타나는 특징을 설명해 봅시다.

크기는 다르지만 단면은 모두 원 모양입니다. 회전체를 회전축에 수직인 평면으로 자르면 단면의 경계에 있는 점들이 회전축에서 같은 거리만큼 떨어져 있으므로 원 모양이 됩니다.



활동 개관

직사각형, 직각삼각형, 반원 등의 기본적인 평면도형을 회전축을 중심으로 1회전 시켜 만들어지는 입체도형(원기둥, 원뿔, 구)을 직접 그려보는 활동이다. 이후 만들어진 각 회전체를 서로 다른 두 위치에서 회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면을 그리고 비교함으로써, 단면의 크기는 다를 수 있지만 모양은 항상 원이 됨을 스스로 발견하고 그 이유를 설명해 본다.



개발 의도

[문제 상황 1]은 기본적인 회전체를 회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면의 공통 성질을 발견하고 설명하는 데 목적이 있다. 학생들이 서로가 그린 단면을 비교하며 왜 단면이 모두 원 모양인지 논의하는 과정에서, 단면의 경계에 있는 점들이 회전축으로부터 모두 같은 거리만큼 떨어져 있다는 성질을 인식하고 설명하도록 문항을 구성하였다. 일부 사례에서의 성질을 일반화하여 회전체를 회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생긴 단면이 언제나 원 모양이라는 인식을 한 학생의 경우, 이어질 [문제 상황 2]에서 인지적 갈등을 경험하며 학습을 이어나갈 수 있도록 설계하였다.



발문

원기둥, 원뿔, 구의 겨냥도를 그리거나 회전축에 수직인 단면을 서로 다른 두 위치에서 잘라 비교하는 것을 어려워하는 학생을 돕기 위해 다음 발문을 제시할 수 있다.

“주어진 평면도형을 1회전 시키면 어떤 입체도형이 될지 상상하여 그려볼까요?”

“자르는 위치(높이)가 달라지면 단면의 크기가 아닌 모양 자체도 변할까요?”

학생들이 단면이 원이 되는 수학적인 이유에 주목하지 않는 경우 이에 대한 모둠 토의를 이끄는 다음 발문을 제시할 수 있다.

“컴퍼스로 원을 그리는 원리를 떠올리며, 회전체의 단면이 왜 원 모양이 되는지 모뎀원과 토의해 볼까요?”



지도상의 유의점 및 대응 방안

- 회전체의 겨냥도를 그릴 때는 그림의 완성도보다는 대략적인 형태와 수학적 특징(실선, 점선, 곡선, 원 모양 등)을 파악하는 데 집중하도록 격려한다.
- 학생이 4번 문항에서 단면이 원 모양이라는 공통점을 발견하고도 그 이유를 수학적으로 서술하기 어려워할 수 있다. 교사가 정답을 직접 제시하기보다 컴퍼스 등의 예를 통해 회전축에서 같은 거리만큼 떨어져 있다는 성질을 학생이 자신의 언어로 표현할 수 있도록 돕는다.
- 활동 후 학생들은, 회전체를 회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면은 언제나 원이라고 일반화할 수 있다. 이때 교사는 이러한 일반화에 대해 긍정이나 부정을 하기보다는 “과연 그럴까요?” 또는 “다음 단서를 살펴봅시다.”와 같이 호기심을 자극하는 발문을 제시함으로써, 긴장감을 유지한 채 [문제 상황 2]로의 자연스러운 연결을 이끈다.

문제 상황 2 다음을 해결해 봅시다.

- 1 다음 평면도형을 직선 l 을 회전축으로 하여 1회전 시킬 때 생기는 회전체를 그려봅시다.

도형 1	도형 2	도형 3

- 2 각 회전체를 회전축에 수직인 평면으로 자를 위치를 정하고 그 위치에서 자를 때 생기는 단면을 그려봅시다.

도형 1		도형 2		도형 3	
자를 위치	단면	자를 위치	단면	자를 위치	단면

- 3 [문제 상황 2]에서 나온 단면들은 어떤 모양인지 적고, 그 특징을 설명해 봅시다.

도형 1과 도형 2를 회전시켜 만들어진 회전체를 회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면은 우리가 익숙하게 볼 수 있는 원 모양이지만, 도형 3의 경우 회전체를 자른 단면은 가운데가 뚫린 도넛과 비슷한 모양입니다. 이 단면은 중심이 같고 크기가 다른 두 원으로 이루어졌다는 특징이 있습니다.



활동 개관

도형 1, 2, 3을 회전축을 중심으로 1회전 시켜 생기는 입체도형을 그리고, 각 도형을 회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면을 그리는 활동이다. 특히 도형 3은 완성된 회전체를 회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면이 원이 아닌 경우로 제시하였다.



개발 의도

‘회전체를 회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면은 항상 원’이라는 오개념을 학생들이 스스로 인식하도록(Recognize) 하는 데 목적이 있다. 직각삼각형의 빗변의 한 꼭짓점만이 회전축 위에 있는 채로 회전시켜 만들어진 회전체를 탐구함으로써, 회전체를 회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면이 원이 아닐 수 있음을 발견하도록 설계하였다.



발문

“도형 3을 1회전 시키면 어떤 입체도형이 될지 상상하며 회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면을 그려볼까요?”

“도형 3의 경우, 평면으로 자른 단면을 원 모양이라고 부를 수 있을까요? 모둠원들과 원의 정의를 떠올리며 토의해 봅시다.”



지도상의 유의점 및 대응 방안

- 도형 3을 회전시켜 만든 회전체를 상상하는 것을 어려워하는 학생에게는 두루마리 휴지, 도넛 등 친숙한 사물을 떠올리게 하여 이해를 돕는다.
- 도형 3을 회전시켜 만든 회전체를 회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면의 모양을 도넛 모양, 파이프 단면 등 일상 용어로 표현할 수 있도록 한다.
- [나의 생각]에 오답을 작성한 학생이 자신의 답을 다시 확인하는 과정에서 부끄러움을 느끼지 않고, 새로운 사실을 스스로 발견하는 탐구의 즐거움과 성취감을 느낄 수 있도록 허용적인 분위기를 조성한다.

[문제 상황 1]과 [문제 상황 2]를 통해 내가 가지게 된 ‘회전체를 회전축에 수직으로 자를 때 생기는 단면의 성질’에 대한 생각을 아래에 적어봅시다.



탐정 메모

일부 회전체를 회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면은 원 모양이다. 반면 직각삼각형에서 빗변의 한 꼭

짓점만 회전축 위에 있는 경우, 이를 회전시켜 생긴 회전체를 회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면은

원 모양이 아니다. 따라서 단면이 원 모양이 아닐 수도 있다는 지연이의 생각에 동의한다.



활동 개관

[문제 상황 1]과 [문제 상황 2]를 통해 탐구한 결과를 종합하여, 학생 스스로 [나의 생각]을 최종적으로 수정하고 정리하는 단계이다. 새롭게 발견한 단면의 성질을 자신의 언어로 기록하며 마무리한다.



개발 의도

수학적 결론을 도출한 뒤 이를 자신의 초기 생각과 비교하여 오답 이면의 오개념을 인식하고(Recognize), 새롭게 구성한 개념을 자신의 언어로 정리하도록 설계하였다.



발문

"처음에 작성한 [나의 생각]을 다시 한 번 확인해 볼까요?"

"직각삼각형의 한 변을 회전축으로 하여 회전시켰을 때와 한 꼭짓점만 회전축 위에 있게 하여 회전시켰을 때, 만들어진 회전체를 자른 단면은 각각 어떻게 달랐나요?"

"그렇다면 회전체를 자른 단면은 항상 원이라고 할 수 있을까요? 방금 발견한 차이를 바탕으로 처음 생각에서 달라진 점과 새롭게 알게 된 사실을 탐정 메모에 정리해 봅시다."



지도상의 유의점 및 대응 방안

- 1차시는 완벽한 개념 정리보다는 초기 추측을 만족하지 않는 예를 관찰하며 인지적 갈등을 경험하는 데 주안점이 있다. 따라서 초기 오답을 인지한 것 자체를 적극 격려한다.

- 초기 오답을 수정하는 것을 부끄러워하지 않도록 지도하며, 새로운 단서로 결론을 개선하는 과정이 의미 있는 수학적 탐구임을 강조한다.

미션

360도 회전의 비밀을 밝혀라!

탐정: _____

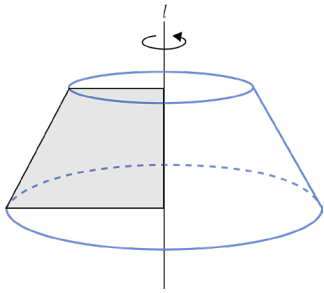
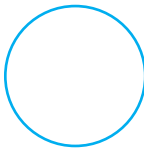
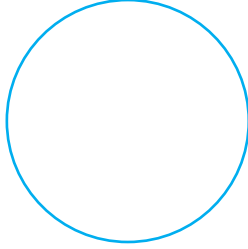


< 탐정 미션 2. 숨은 단서를 찾아라! >

문제 상황 이웃한 두 내각의 크기가 90° 인 사다리꼴을 직선 l 을 회전축으로 1회전 시켜 회전체를 만들려고 합니다.

1 아래 문제를 해결해 봅시다.

1 회전체와 회전체를 회전축에 수직인 서로 다른 두 평면으로 자를 때 생기는 단면을 예상하여 각각 그려봅시다.

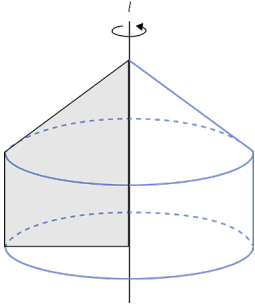
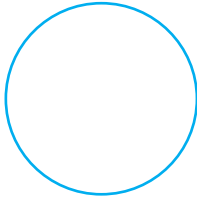
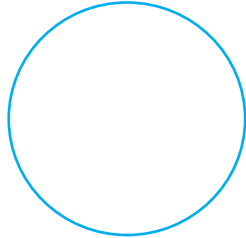
회전체	회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면	
		

2 (1)의 예상이 맞는지 알지오3D에서 확인해 봅시다. 또한 예상이 적중한 경우 어떻게 예상했는지 그 전략을, 예상 전략에 보완이 필요하다면 그 이유를 적어 봅시다.

알지오3D		확인 결과	예상 전략 점검
	https://www.algeomath.kr/algeo/algeomath/poly/view?id=e3e83ad353b8c1cd3d74d847f1ea971b	☒ 예상 적중 ☐ 보완 필요	사다리꼴을 회전시키면 원뿔대가 나오는데, 원뿔대는 원뿔을 밑면과 평행한 평면으로 잘라서 만들어지는 입체도형 중 원뿔이 아닌 쪽임. 그래서 원뿔대도 원뿔에서 만들어진거니까 원뿔과 같은 단면의 모양이 나올 것이라고 예상함.

2 아래 문제를 해결해 봅시다.

- 1 회전체와 회전체를 회전축에 수직인 서로 다른 두 평면으로 자를 때 생기는 단면을 예상하여 각각 그려봅시다.

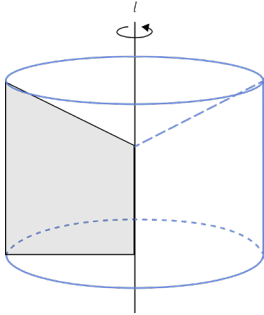
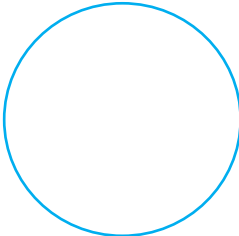
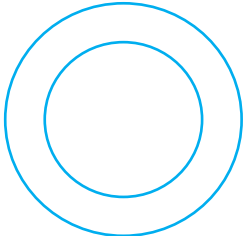
회전체	회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면	
		

- 2 (1)의 예상이 맞는지 알지오3D에서 확인해 봅시다. 또한 예상이 적중한 경우 어떻게 예상했는지 그 전략을, 예상 전략에 보완이 필요하다면 그 이유를 적어 봅시다.

알지오3D		확인 결과	예상 전략 점검
	https://www.algeomath.kr/algeo/algeomath/poly/view?id=121dab4e986d0b79239ecf3249d68011	☒ 예상 적중 ☐ 보완 필요	회전축과 사다리꼴의 한 변 위의 점 사이의 거리가 유지되면서 사다리꼴이 회전하니까 단면은 원이 나와야 함. 그런데 회전축과 사다리꼴의 변 사이의 거리가 다르니까 크기가 다른 원이 만들어질 것이라고 예상함.

3 아래 문제를 해결해 봅시다.

- 1 회전체와 회전체를 회전축에 수직인 서로 다른 두 평면으로 자를 때 생기는 단면을 예상하여 각각 그려봅시다.

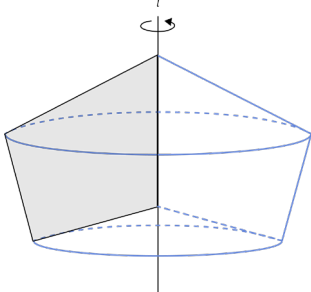
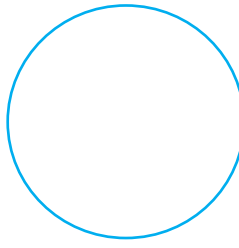
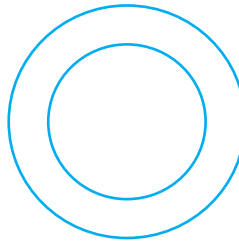
회전체	회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면	
		

- 2 (1)의 예상이 맞는지 알지오3D에서 확인해 봅시다. 또한 예상이 적중한 경우 어떻게 예상했는지 그 전략을, 예상 전략에 보완이 필요하다면 그 이유를 적어 봅시다.

알지오3D		확인 결과	예상 전략 점검
	https://www.algeomath.kr/algeo/algeomath/poly/view?id=d29559e520c7976861c7e0db53681530	☒ 예상 적중 ☐ 보완 필요	<p>완성한 회전체가 겉으로 봤을 때는 원기둥처럼 생겼지만, 실제로는 화산 분화구처럼 파인 형태임. 원기둥을 회전축에 수직인 평면으로 자르면 단면의 모양이 원인데, 파인 부분은 뚫려야 함. 회전체를 보면 원기둥에서 원뿔이 파인 모양이니까 원뿔을 회전축에 수직인 평면으로 자르면 단면의 모양이 원기둥과 같이 원이고, 원기둥과 원뿔의 회전축이 같으니까 파인 부분을 자른 경우 단면의 모양은 동심원으로 나와야 함.</p>

4 아래 문제를 해결해 봅시다.

- 1 회전체와 회전체를 회전축에 수직인 서로 다른 두 평면으로 자를 때 생기는 단면을 예상하여 각각 그려봅시다.

회전체	회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면	
		

- 2 (1)의 예상이 맞는지 알지오3D에서 확인해 봅시다. 또한 예상이 적중한 경우 어떻게 예상했는지 그 전략을, 예상 전략에 보완이 필요하다면 그 이유를 적어 봅시다.

알지오3D		확인 결과	예상 전략 점검
	https://www.algeomath.kr/algeo/algeomath/poly/view?id=0dfc23598b8c6b1066c702e1c771ed1d	☒ 예상 적중 ☐ 보완 필요	회전체를 만드는 방법을 생각하면 회전축에 수직인 직선과 사다리꼴이 만나서 생기는 교점이 회전축에 수직인 직선을 포함하는 평면에서 회전축과 평면의 교점과 일정한 거리를 유지하면서 1회전하여 입체도형을 만듦. 그래서 회전체를 회전축에 수직인 평면으로 자르면 단면은 원이 되는데, 회전축에 수직인 직선과 사다리꼴의 서로 다른 두 교점이 모두 회전축 위에 있지 않다면 두 교점 모두 회전하면서 원을 만들기 때문에 동심원 모양이 만들어질 수 있다고 생각함.



활동 개관

이웃한 두 내각의 크기가 90° 인 사다리꼴의 각 변이 회전축에 포함되는 경우 회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면을 예상하고 알지오3D에서 '회전하기' 기능을 활용하여 예상한 결과가 옳은지 확인한다. 예상 결과를 확인한 후 자신의 예상 전략을 분석하게 한다.



개발 의도

1차시에서 직각삼각형을 이용하여 '회전체'를 회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면의 모양이 항상 원'이 아님을 확인하였다.

본 문항에서는 학생들이 사다리꼴을 활용하여 '회전체'를 회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면의 경계가 원'임을 학생들이 귀납적으로 추측한다(Investigate).

[문제 상황]에 제시된 4개의 문항은 예상하기, 알지오3D에서 확인하기, 성찰하기로 구성되어 있다. 이러한 문항의 구성은 반복된 예상하기와 검증하기를 통해 학생들이 알지오3D로 자신이 예상한 것과 실제 결과를 비교하며 자신의 사고를 반성할 수 있도록 하였다. 학생들이 정·오답의 판단보다는 자신의 문제 해결 과정을 스스로 분석하며 '회전체'를 회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면의 경계가 원'임을 회전체의 정의와 연결하여 학습하도록 하였다. 이와 동시에 자신의 문제 해결 과정과 결과를 반성하며 수학에 대한 긍정적인 가치·태도를 갖도록 의도하였다.



발문

- 1차시와 2차시의 연계성을 높이기 위해 다음과 같은 발문을 사용할 수 있다.

"지난 시간 활동의 결과로 여러분들이 생각한 회전체의 성질은 무엇이었나요?"

"지난 시간에 이어, 회전체의 성질과 관련해서 우리가 더 해결해야 할 것으로 어떤 것이 있을까요?"

- 회전체의 겨냥도를 그리거나 회전체를 회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면의 모양을 그리기 어려워하는 학생들에게 다음과 같은 발문을 사용할 수 있다.

"회전체의 의미가 무엇이었나요?"

"입체도형인 회전체를 평면에 어떻게 그려야 모두가 이 회전체의 모양을 알 수 있을까요?"

"빈 곳에 정육면체를 그려볼래요? 이 모서리는 왜 점선으로 그렸나요?"

"앞에서 평면과 직선의 위치 관계에 대해서 학습했던 내용을 떠올려볼까요? 그러면 회전축에 수직인 평면으로 자른다는 것이 이 회전체를 어떻게 자르라는 의미인지 알 수 있을 거예요."

- 학생들이 알지오3D 조작이 아닌 회전체를 만들고, 회전체를 회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면의 모양을 탐구하는 데 주목할 수 있도록 교사는 다음과 같은 발문을 사용할 수 있다.

"화면을 자유롭게 움직일 수 있지만, 우리가 지금 보고 싶은 단면은 회전체를 회전축에 수직인 평면으로 잘랐을 때니까 어느 방향으로 시점을 움직이면 될까요?"

"회전체를 겨냥도로 표현하고, 여러 방향에서 관찰하면서 회전체를 회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면의 모양을 생각해 봅시다."

"회전축에 수직인 평면이 무수히 많은데, 앞쪽이나 뒤쪽에서만 회전체를 보면 모든 경우를 찾을 수 있을까요?"

- 학생들이 스스로 회전체의 정의와 회전체를 회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면의 모양을 연결하지 못한다면 교사는 다음과 같은 발문을 활용할 수 있다.

"여기 이 볼펜이 회전축이라고 해봅시다. 볼펜을 기준으로 이 지우개가 한 바퀴 회전한다고 하면 어떻게 움직일까요? 직접 지우개를 움직여봐도 되고, 손으로 표현해도 좋아요."

"이 움직임을 도형으로 표현하면 어떤 모양이 될까요?"

"회전체 그림에서, 이 부분을 왜 곡선으로 표현했나요?"



지도상의 유의점 및 대응 방안

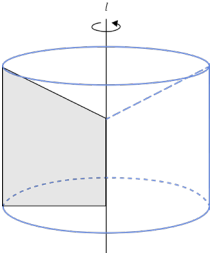
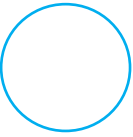
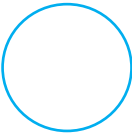
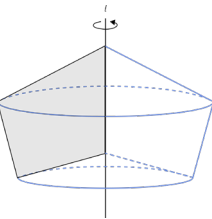
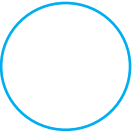
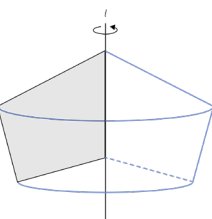
- 1차시와 2차시 연계성 높이기

- 지난 시간에 다양한 평면도형을 회전시켜 회전체를 그리고, 그 회전체를 회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면에 대해 관찰했던 것을 상기시킨다.

- [문제 상황]의 각 문항에 대한 학생 예상 답안 및 지도

- [문제 상황]에 제시된 4개의 문항은 숨은 단서를 찾기 위한 수학적 논의의 준비 과정으로 학생들이 정·오답 여부보다는 스스로 생각하고 표현하는 것에 집중할 수 있도록 한다.
- 다음은 학생들의 추가적인 예상 반응이다.

문항	회전체	회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면		확인 결과	예상 전략 점검
1				☒ 예상 적중 ☐ 보완 필요	원뿔대는 원뿔의 일부분이므로 원뿔과 같은 모양의 단면이 나올 것이라고 생각함.
1				☐ 예상 적중 ☒ 보완 필요	회전체를 회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면의 모양은 종이에 그린 회전체를 기준으로 예상해서 찌그러진 원으로 그림.
2				☒ 예상 적중 ☐ 보완 필요	사다리꼴을 구성하는 변 위의 한 점을 회전축을 중심으로 1회전 시키면 원이 만들어지니까 단면의 모양은 원인데, 회전축과 점 사이의 거리가 일정하지는 않아서 크기가 다른 두 원을 그림.
2				☐ 예상 적중 ☒ 보완 필요	원뿔과 원기둥으로 구성된 회전체가 만들어지는데, 활동지에 그림 때 보이지 않는 부분을 정확하게 그리지 못하여 케익 조각 모양처럼 그림. 그러다 보니 회전체를 회전축이 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면의 모양도 부채꼴이 될 것이라고 생각함.
3				☐ 예상 적중 ☒ 보완 필요	원기둥 모양으로 회전체가 만들어질 것 같아서 회전체를 회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면의 모양을 원만 가능하다고 생각함.

문항	회전체	회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면		확인 결과	예상 전략 점검
3				☐ 예상 적중 ☒ 보완 필요	사다리꼴을 회전시키면 원기둥에서 원뿔을 잘라낸 모양의 회전체가 만들어질 것 같았음. 원뿔, 원기둥 모두 회전체를 회전축에 수직인 평면으로 자르면 만들어지는 단면의 모양이 원이니까 원만 가능하다고 생각함.
4				☐ 예상 적중 ☒ 보완 필요	사다리꼴을 직선 l 을 회전축으로 1회전 시키면 원뿔과 원뿔대를 이어 붙인 회전체가 만들어질 것으로 생각함. 원뿔과 원뿔대 모두 회전축에 수직인 평면으로 자르면 만들어지는 단면이 원이니까 이 회전체 역시 원만 만들어질 것이라고 판단함.
4				☐ 예상 적중 ☒ 보완 필요	회전체를 그릴 때 보이지 않는 부분을 점선으로 표시하지 않아서 회전체를 원뿔대의 일부로 보고 회전체를 회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면을 부채꼴로 판단함.

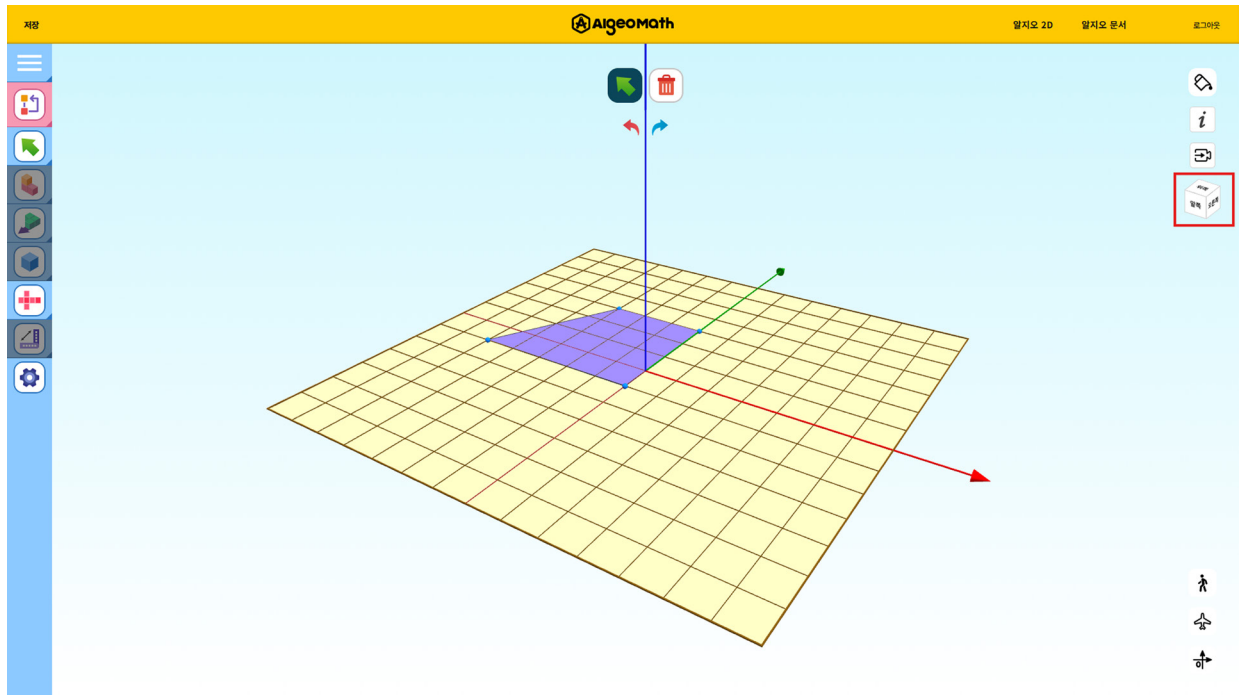
- 회전체 그리기

- 학생들이 회전체를 그릴 때 겨냥도로 나타내는 데 어려움을 보일 수 있다. 회전체를 그리는 과정은 회전체를 회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면의 경계가 원임을 설명하는 핵심적인 활동이다. 따라서 교사는 학생들이 회전체를 점차적으로 그리는 것이 아니라 그 원리를 이해할 수 있도록 지원해야 한다.
- 이를 위해 교사는 각 문항에서 학생들이 개별적으로 (1)을 해결한 후 바로 알지오3D에서 자신의 예상을 확인하는 것이 아니라 모둠에서 자신의 예상을 정당화하고, 검증하는 기회를 제공할 수 있다.
- 학생들은 알지오3D로 자신의 예상을 검증한 후 자신의 예상이 적절하지 않았다면 그 이유를 충분히 분석하는 기회를 가지며 소문항 진행에 따라 논리적으로 사고하여 예측의 정확도를 높일 수 있다.
- 학생들은 겨냥도를 정확히 그리지 못할 수 있다. 옳은 겨냥도를 그리는 것과 학생들이 회전체를 예상하는 것을 동일시하기보다는 짝 활동, 모둠활동, 교사 발문 등을 통해 학생이 회전체를 정확히 예상할 수 있는지 확인하는 것이 중요하다. 또한 학생들이 부정확하게 그린 겨냥도를 활용하여 학급 전체 논의를 진행하고 학생들이 겨냥도를 그리는 방법, 옳은 겨냥도를 그려야 하는 필요성을 스스로 인식할 수 있게 한다.

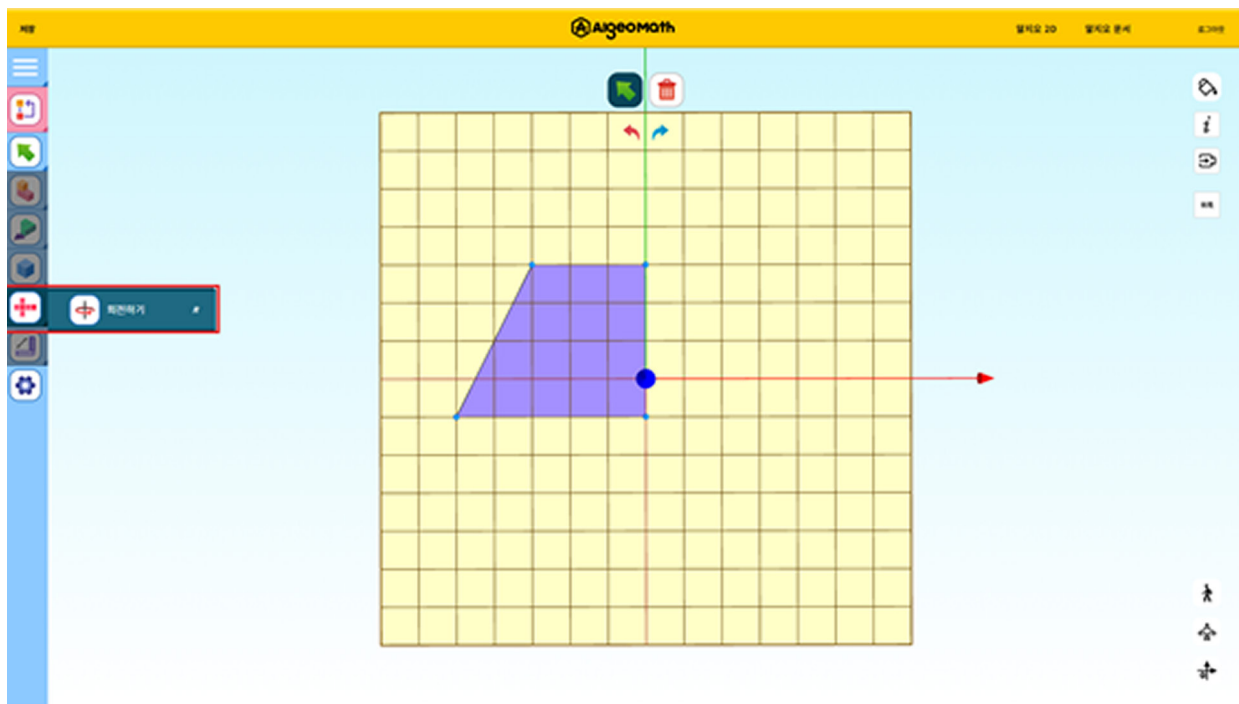
- 알지오3D로 회전체 만들고 관찰하기

- 알지오3D에서 회전체를 만들고 관찰하는 방법에 대한 안내가 필요하며, 각 문항의 (2)에 제공된 알지오3D는 다음과 같이 사용한다.

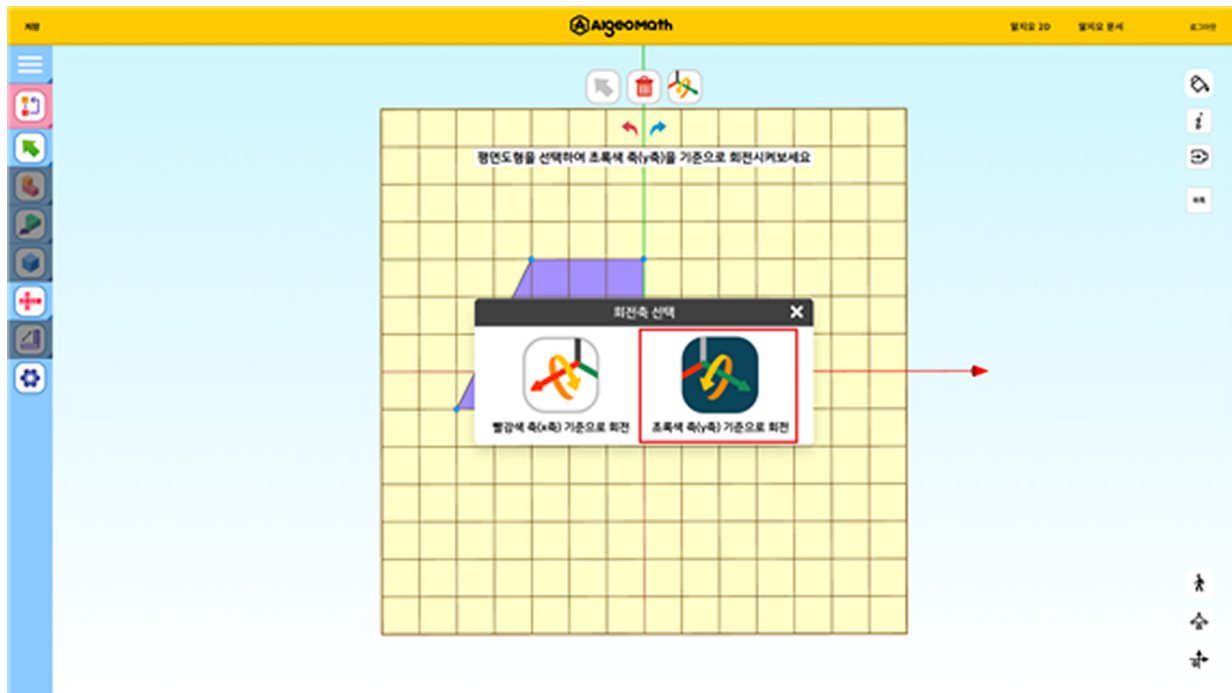
① 화면 오른쪽 시점 변환 큐브에서 '위쪽'을 클릭하여 초록색 축(Y축)을 회전축으로 하는 사다리꼴을 확인한다.



② 전개도 도구 모음에서 '회전하기' 기능을 선택한다.

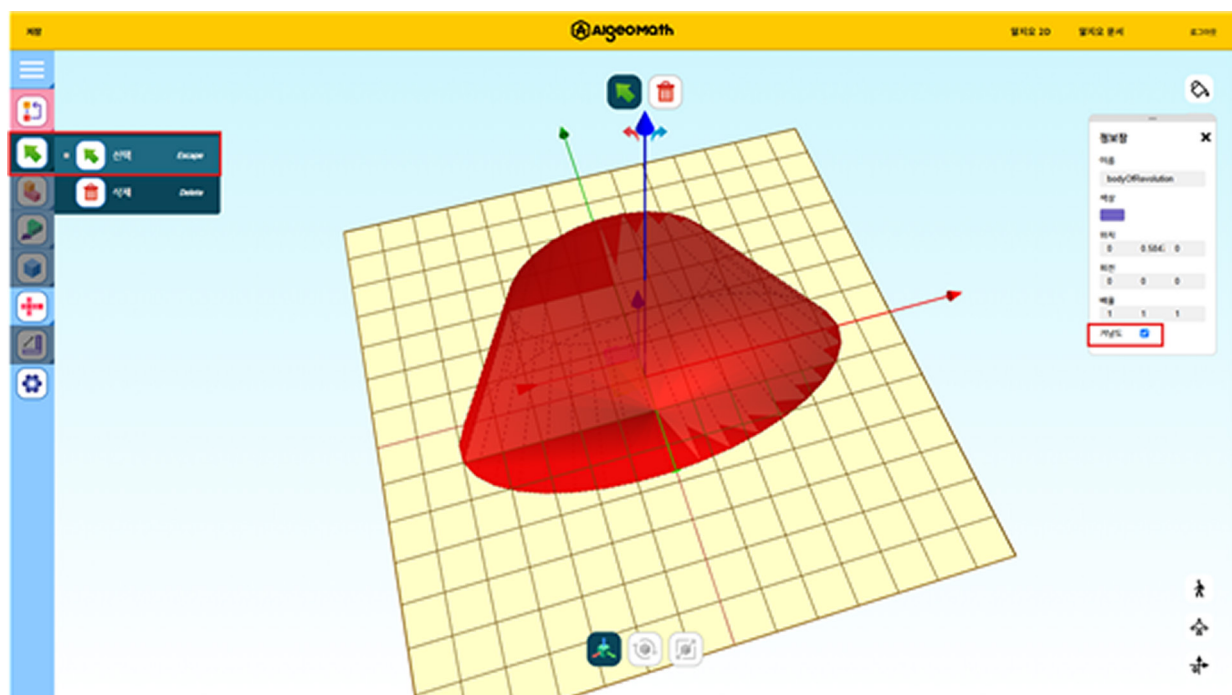


③ 초록색 축(y 축) 기준으로 회전을 선택한 후 사다리꼴을 클릭하여 회전체를 만든다.



④ 시점 변환 큐브, 한 방향에서 보기 등의 기능이나 화면을 직접 드래깅하여 회전체를 관찰한다.

⑤ 회전체를 겨냥도로 나타내고자 하는 경우 '선택' 기능으로 변경한 후 회전체를 선택한다. 화면 오른쪽의 정보창(**i**)을 클릭하고 겨냥도 체크박스를 클릭한다.



-예상이 옳지 않은 경우, 그 원인 분석하기

- (2)에서 학생들은 (1)에서 자신이 예상한 것과 알지오3D로 확인한 결과가 일치하지 않는 경우 자신의 사고 과정을 반성할 수 있도록 한다.
- 특히 본 차시에서 학생들이 회전체를 회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면의 '경계'가 원임을 발견하기 위해서는 회전체의 정의를 근거로 회전체가 어떻게 만들어지는지 알고 이를 단면을 예상하는 데 적용해야 한다.
- 학생들이 원과 원환을 구분하지 못하는 경우 구체적인 예(원형 접시, 거울 등과 CD, LP, 두루마리 휴지, 도넛 등)를 이용하여 원과 원환을 비교하는 기회를 제공할 필요가 있다.
- 회전체를 회전축에 수직인 평면으로 잘랐을 때 생기는 단면의 모양을 특정 위치에서 자를 때 생기는 단면의 모양으로만 예상할 수 있다. 이 경우 교사는 1차시에서 학생들이 서로 다른 위치에서 회전체를 회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면의 모양을 찾아보았던 것을 상기시킨다.

탐색

[문제 상황]의 결과를 이용하여 다음 문제를 해결해 봅시다.

- 1 회전체를 회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면의 공통점을 찾아봅시다.

- 원 또는 도넛 모양이다.

- 한 개 이상의 원으로 이루어져 있다.

- 단면의 테두리가 원이다.

- 2 이제까지의 활동을 바탕으로 회전체를 회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면의 성질을 설명하기 위한 '숨은 단서'를 정리해 봅시다.

오늘 발견한 숨은 단서!

회전체를 회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면에는 특정 성질이 있다. 이 성질을

설명하기 위한 단서는 단면의 경계 이다!



활동 개관

[탐색]에서는 [문제 상황]에서 탐구한 결과를 바탕으로 회전체의 성질 중 회전체를 회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면의 모양을 설명하기 위한 숨은 단서로 '단면의 경계'를 찾아 정리한다.



개발 의도

[탐색]에 제시된 두 문항은 학생들이 발견해야 하는 숨은 단서인 '단면의 경계'를 교사가 직접 제시하지 않고 학생들의 표현으로부터 점차 수학적 표현으로 발전할 수 있도록(Self-regulated) 의도하였다. 구체적으로 첫 번째 문항은 [문제 상황]에서 학생들이 그림으로 표현했던 결과를 언어적으로 표현하면서 회전체를 회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면의 공통점에 주목할 수 있도록 하였다. 두 번째 문항은 첫 번째 문항에서 학생들의 표현을 종합하여 '단면의 경계'로 일반화할 수 있게 하였다. 학생들이 문항을 해결하는 과정에서 수학의 가치를 인식할 수 있도록 두 단계로 문항을 구성하였다.



발문

- 교사는 다음과 같은 발문을 활용하여 학생들이 회전체를 회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면을 비교하여 공통점을 찾도록 지원할 수 있다.

"4개의 회전체에서 회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면을 한 곳에 그려서 비교해 볼까요?"

"예상과 다른 결과를 확인하고, 원인을 어떻게 분석했나요? 분석한 결과를 이 공통점을 찾는 데 적용할 수 있나요?"

"공통점을 찾는 것이 목표니까 우리가 찾은 단면을 한 문장으로 표현하는 방법을 생각해 볼까요?"

- 학생들의 응답을 이용하여 숨은 단서를 유도하는 과정에서 교사는 다음과 같은 발문을 사용할 수 있다.

"친구들이 찾은 단면의 공통점이 조금씩 다르게 표현되어 있는데요. 같은 유형끼리 모아서 보면 우리가 숨은 단서를 찾을 수 있을 것 같아요. 기준을 어떻게 설정할 수 있을까요?"

"공통점의 유형 중에서 어떤 유형이 네 종류의 회전체에서 얻은 단면의 모양을 설명하는 데 가장 적합할까요?"

"이 표현에서 사람마다 다르게 이해할 수 있는 부분이 있을까요? 이 단어를 어떻게 수정하며 모두가 같은 의미로 받아들일 수 있을까요?"



지도상의 유의점 및 대응 방안

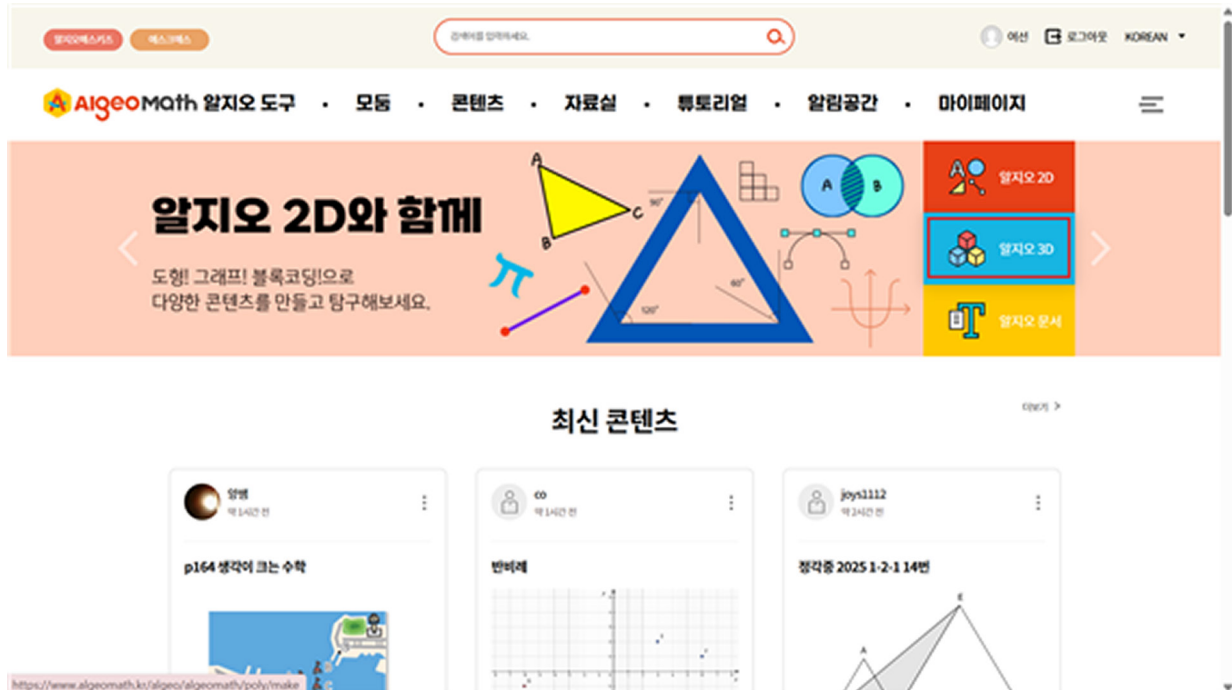
- [탐색]의 첫 번째 문항에서는 학생들이 원과 원환의 공통점을 찾는 것이 목표이지만 반드시 수학적 표현을 사용해야 하는 것은 아니다. 학생은 다양한 용어를 사용하여 공통점을 서술할 수 있다.

- 교사는 학생들에게 학생들이 공통점으로 제시한 표현을 다시 분류하고 종합할 수 있는 학습 기회를 제공하여 두 번째 문항이 빈칸에 들어갈 내용인 '단면의 경계'라는 표현으로 발전할 수 있도록 지원해야 한다.

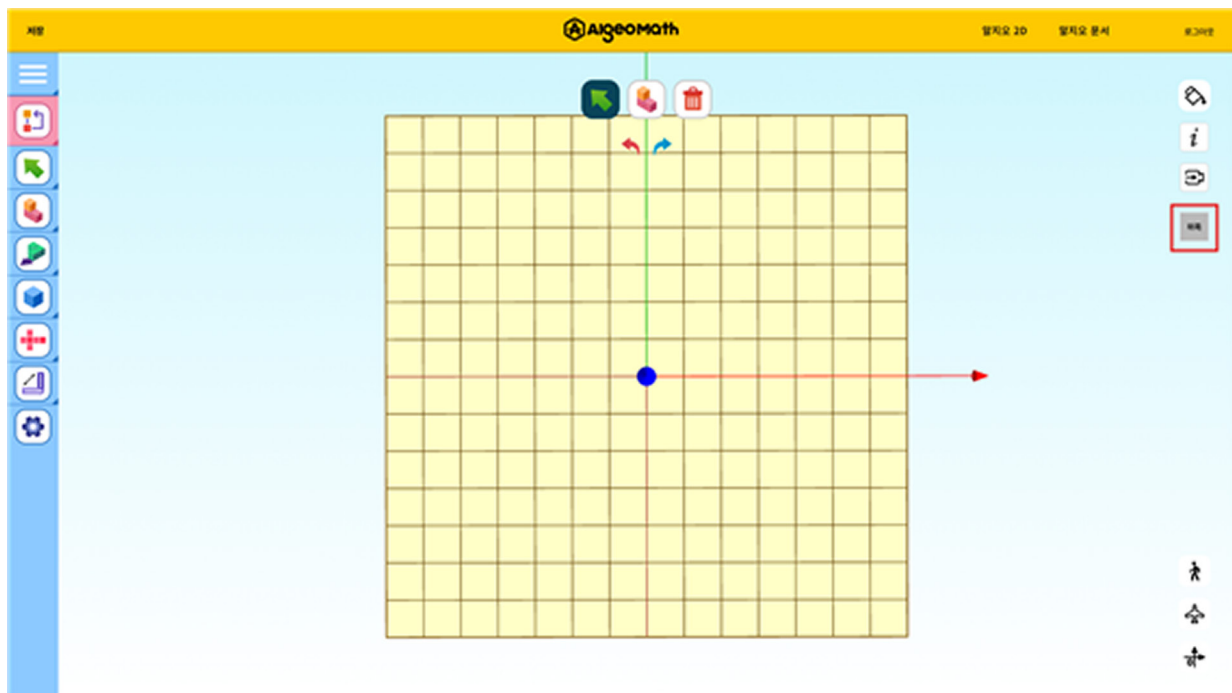
- 또한 교사는 학생들이 회전체를 회전축에 수직인 평면으로 잘랐을 때 생기는 단면의 경계가 원이라는 것을 원의 정의와 연결하는 학습 기회를 제공할 필요가 있다.

- 학생의 속도나 수준에 따라 [탐색]의 첫 번째 문항 해결 후 학생들에게 다양한 회전체에서 발견한 사실이 참인지 확인하게 할 수 있다.
교사는 학생들에게 알지오3D에서 다음과 같은 단계로 회전체를 만들고 관찰하게 한다.

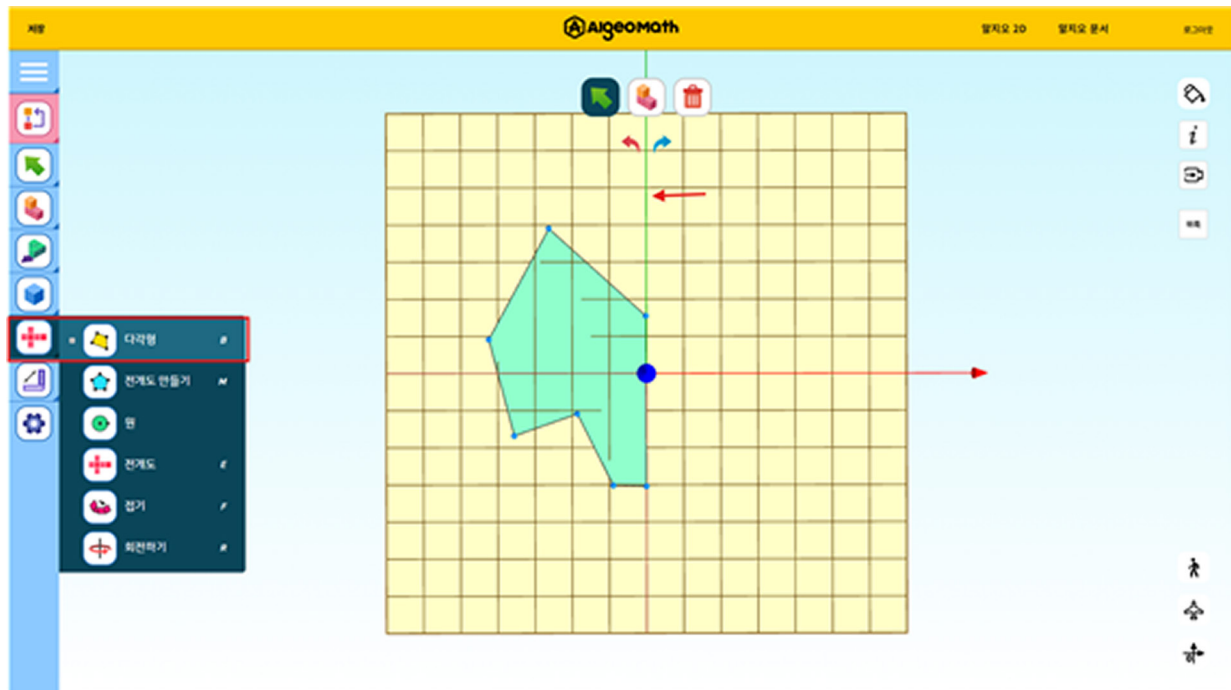
① algeomath.kr/algeo로 접속하고, 알지오3D를 선택한다.



② 시점 변환 큐브에서 '위쪽'을 클릭하여 그리드를 정면에 위치시킨다.



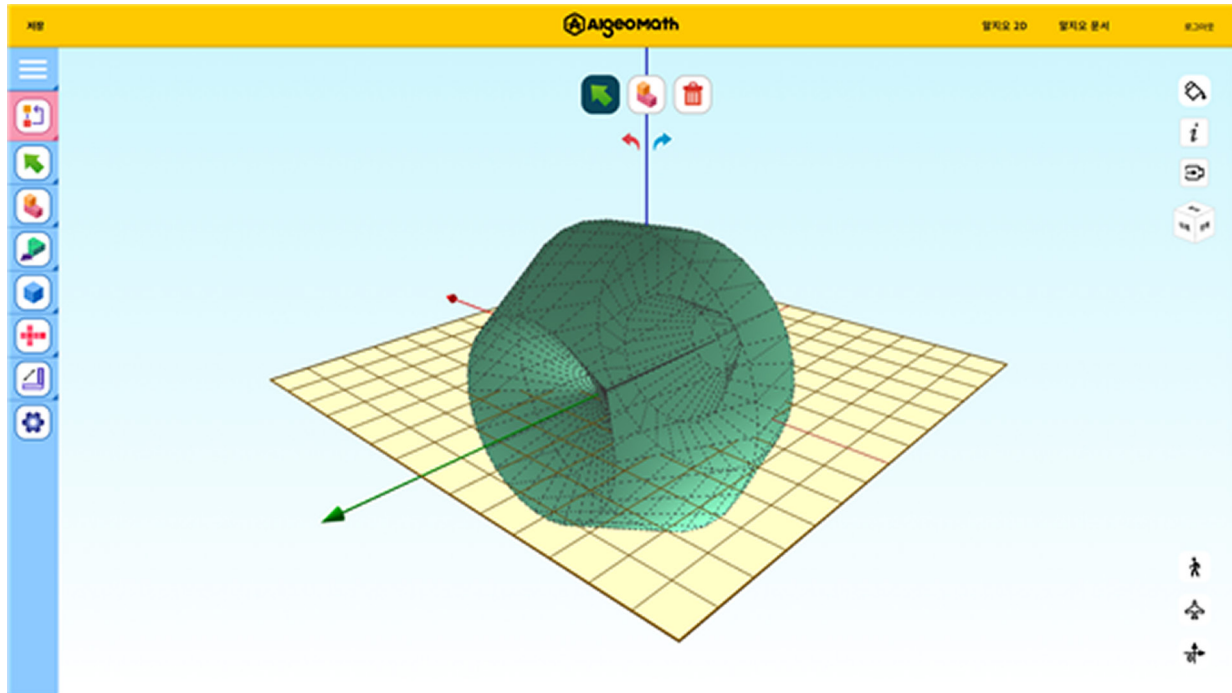
③ 전개도 도구 모음에서 다각형을 선택하고 초록색 축의 왼쪽 또는 오른쪽에 원하는 모양의 다각형을 그린다. 다각형을 만들 때는 다각형을 만들기 시작한 점을 마지막에 한 번 더 선택해야 다각형이 생성된다.



④ 전개도 도구 모음에서 회전하기 기능을 이용하여 다각형을 초록색 축을 기준으로 회전시킨다.

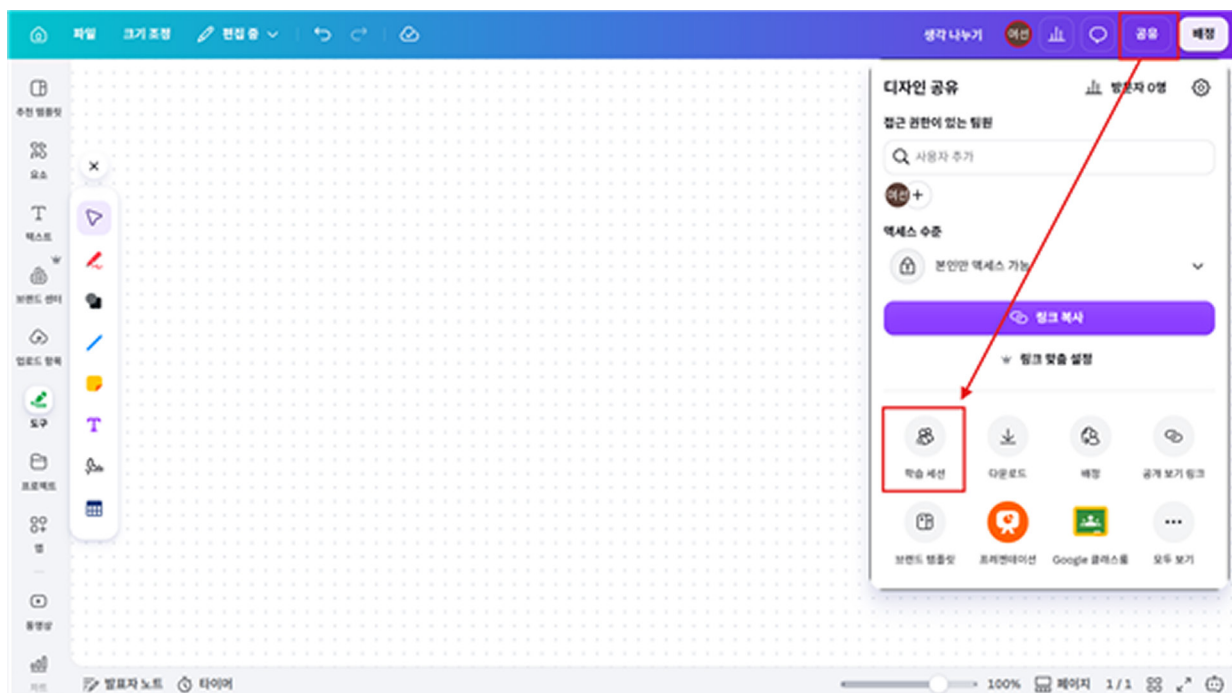


⑤ 완성한 회전체를 여러 각도에서 확인하며 회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면의 경계가 원인지 확인한다.

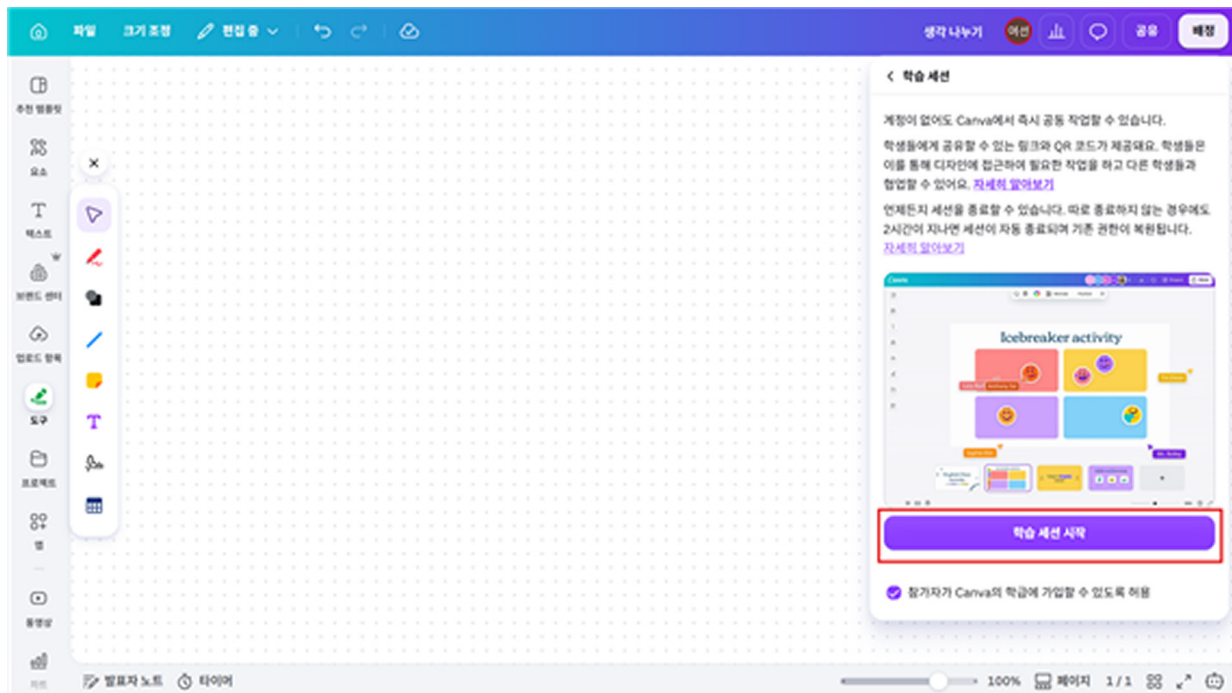
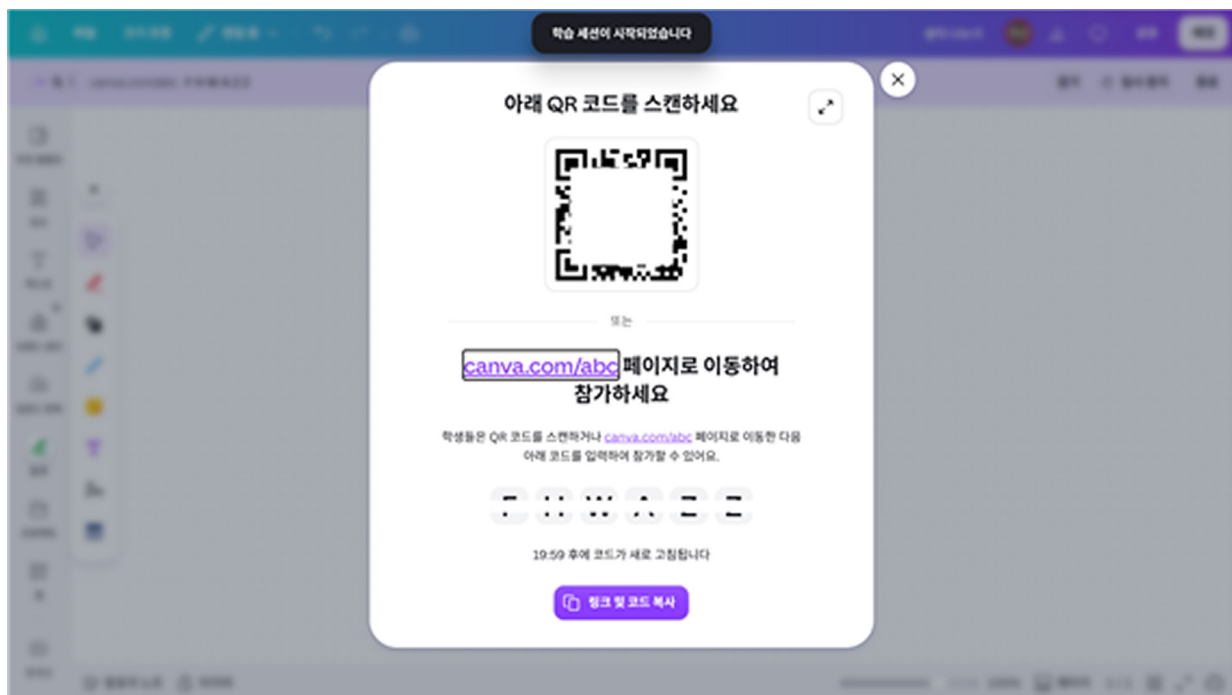


- 두 번째 문항에서 숨은 단서인 '단면의 경계'는 첫 번째 문항에서의 학생 응답을 통해 유도한다. 이를 위해 학생들의 응답을 수집할 수 있는 협업 도구를 활용할 수 있다. 한 가지 예로 Canva 화이트보드를 이용하는 방법은 다음과 같다.

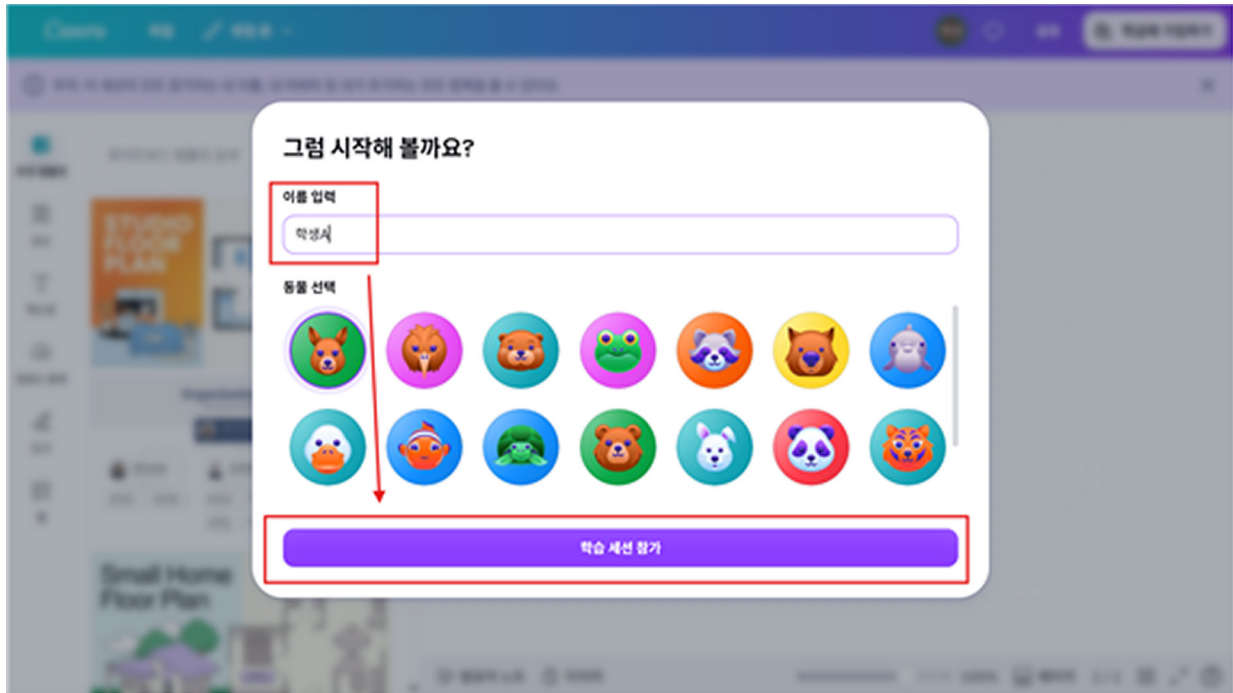
① 교사는 Canva에서 화이트보드를 만들고 공유에서 학습 세션을 클릭한다.



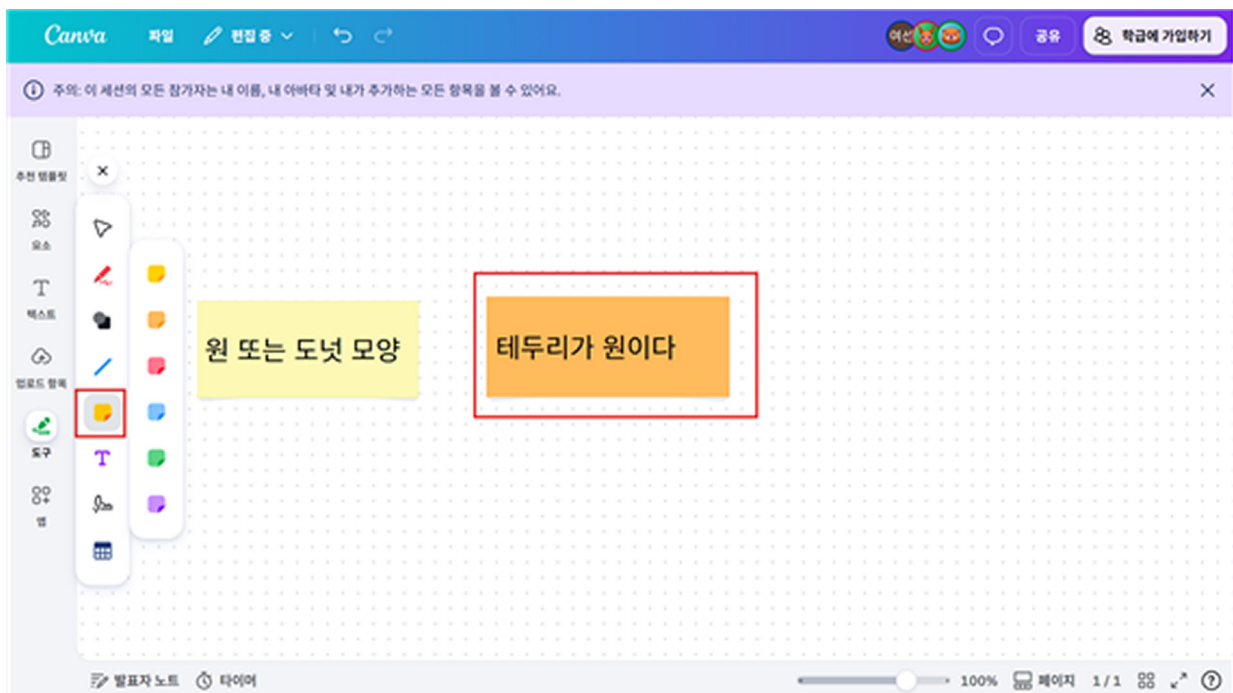
② 교사는 학습 세션 시작을 클릭하고 화면에 나오는 QR, 링크, 코드 등을 학생들에게 공유한다.



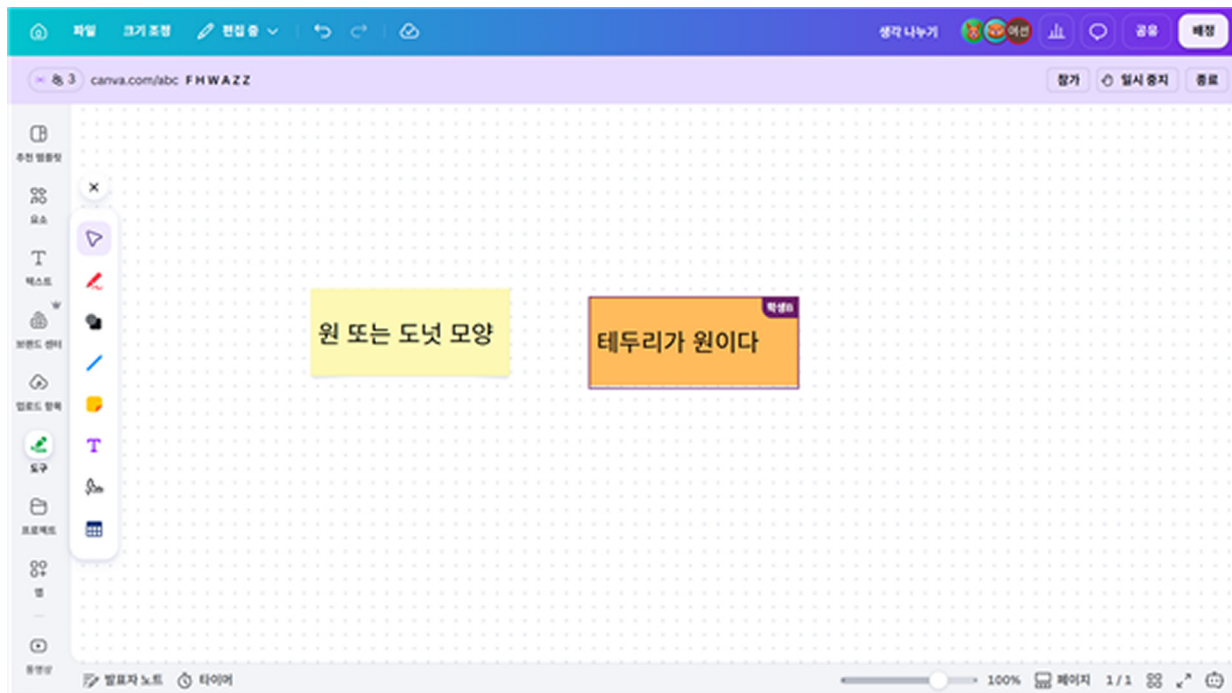
③ 학생은 교사가 제공한 QR, 링크, 코드 등을 이용하여 화이트보드에 접속한다. 접속 시 이름을 작성하고 학습 세션 참가를 클릭한다.



④ 학생은 스티커 메모 등의 기능을 이용하여 자신의 생각을 작성한다.



⑤ 교사와 학생은 공유된 화이트보드를 이용하여 학생들의 응답을 서로 확인하고, 스티커 메모를 이동시켜 유사한 응답끼리 분류할 수 있다.



미션

360도 회전의 비밀을 밝혀라!

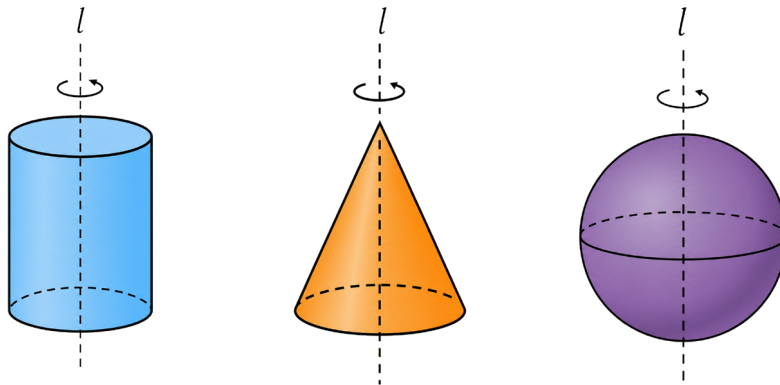
탐정: _____



< 탐정 미션 3. '회전체의 성질' 전문가가 되어라. >

문제 상황

지난 시간에 회전체를 회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면의 경계는 원 모양이라는 것을 확인했습니다. 회전체를 회전축을 포함하는 평면으로 자를 때 생기는 단면에는 어떤 성질이 있는지 알아보시다.



위 회전체(원기둥, 원뿔, 구)는 직선 l 을 회전축으로 합니다. 위 회전체를 회전축을 포함하는 한 평면으로 잘라 생긴 단면이 다음과 같습니다.

원기둥		원뿔		구	
자른 위치	단면	자른 위치	단면	자른 위치	단면

- 세 회전체를 회전축을 포함하는 다른 평면으로 자를 때 생기는 단면이 위의 그림과 같은지, 다른지 판단해 봅시다. 그렇게 판단한 이유를 적어 봅시다.

다른 평면으로 자를 때 생기는 단면은 위의 그림과 동일하다. 회전축을 포함하는 어느 평면으로 잘라도 같은 모양과 크기의 단면이 만들어져, 이때의 단면들은 모두 합동이기 때문이다.

2 세 단면의 모양이 지닌 공통점을 찾아 적어 봅시다.

선대칭도형이다. 선대칭도형의 대칭축은 회전체의 회전축과 동일하다.

3 회전체를 회전축을 포함하는 평면으로 자를 때 생기는 단면의 성질을 설명하기 위한 '숨은 단서'를 정리해 봅시다.



오늘 발견한 숨은 단서!

회전체를 회전축을 포함하는 평면으로 자를 때 생기는 단면은 합동 이고 각 단면은
회전축 을 대칭축으로 하는 선대칭도형 이다!



활동 개관

원기둥, 원뿔, 구, 원뿔대를 회전축을 포함하는 서로 다른 평면으로 자를 때 생기는 단면을 예상하고 그 특징을 탐구한다.



개발 의도

2차시에서는 회전체를 회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면의 경계에 주목하였다. 이를 더 확장하여, 3차시에서는 회전체를 회전축을 포함한 평면으로 자를 때 생기는 단면을 탐구한다. [문제 상황]에서 학생은 회전체를 회전축을 포함하는 서로 다른 두 평면으로 자른 결과를 비교한다. 이 활동은 RISE의 마지막 단계인 확장(Expand)의 단계에 해당한다.

1번 문항에서는 회전축을 포함하는 다른 평면으로 자를 때 생기는 단면을 예상해보며, 이때의 단면들은 모두 합동이라는 성질을 확인한다.

2번 문항에서는 네 단면의 공통점을 찾아보며, 네 단면의 모양이 선대칭도형이며 대칭축은 회전축과 같다는 것을 확인한다.



발문

"지난 시간 활동의 결과로 여러분들이 생각한 회전체의 성질은 무엇이었나요?"

"지난 시간과 다르게 회전체를 자를 수 있는 방법이 있을까요?"

"특히 회전체를 회전축을 포함하는 평면으로 자를 때 생기는 단면에는 어떤 성질이 있을까요?"



지도상의 유의점 및 대응 방안

- 학생들이 '회전축을 포함하는 평면'의 의미를 정확히 이해하도록 한다. 기본 도형 단원에서 학습한 직선과 평면의 위치 관계를 바탕으로, 평면 위에 회전축 전체가 놓여 있어야 한다는 것을 그림이나 모형을 제시하여 확인하게 한다.

- 1번에서는 학생들이 단면의 겉모양만 비교하지 않도록 하고, 모양과 크기를 함께 살펴보며 합동 여부를 판단하게 한다.

- 2번에서는 학생이 단면의 모양만이 아니라 대칭축까지도 주목할 수 있도록 지도한다.

정리

지금까지 배운 내용들을 정리해 봅시다.

1 다음 오답들에 대한 처방전을 만들어 봅시다.

오답 처방전

1 회전체를 회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면은 항상 원 모양이다.

→ 왜 오답일까?

회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면은 원 모양이 아닐 수도 있다. 예를 들어, 직각삼각형의 빗변의 한 꼭짓점만 회전축 위에 있을 때, 직각삼각형을 회전축을 중심으로 회전시켜 만들어진 회전체를 회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면은 원 모양이 아니다.

→ 올바른 설명

회전체를 회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면의 경계는 원이다.

2 회전체를 회전축을 포함하는 평면으로 자를 때 생기는 단면의 모양이나 크기는 다양하다.

→ 왜 오답일까?

회전체를 회전축을 포함하는 서로 다른 평면으로 자를 때 생기는 단면의 모양과 크기는 언제나 같기 때문이다.

→ 올바른 설명

회전체를 회전축을 포함하는 서로 다른 평면으로 자를 때 생기는 단면은 모두 합동이다.

3 회전체를 회전축을 포함하는 평면으로 자를 때 생기는 각 단면은 선대칭도형이며 대칭축은 단면마다 다르다.

→ 왜 오답일까?

회전체를 회전축을 포함하는 평면으로 자를 때 생기는 단면이 선대칭도형인 것은 맞지만, 대칭축은 모두 회전축으로 동일하기 때문이다.

→ 올바른 설명

회전체를 회전축을 포함하는 평면으로 자를 때 생기는 각 단면은 회전축을 대칭축으로 하는 선대칭도형이다.

2 지금까지 배운 내용을 정리하여 회전체의 성질을 설명하는 나만의 탐정 규칙을 적어 봅시다.

나만의 탐정 규칙

회전체에는 다음 성질이 있다.

① 회전체를 회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면은 단면의 경계가 원이다.

② 회전체를 회전축을 포함하는 평면으로 자를 때 생기는 단면은 모두 합동이고, 각 단면은 회전축을 대칭축으로 하는 선대칭도형이다.

그것이 바로 우리가 찾던 '숨은 단서'이다!



활동 개관

지금까지 학습한 회전체의 성질에 관한 내용을 정리한다. 회전체를 회전축에 수직인 평면으로 자르는 경우와 회전축을 포함하는 평면으로 자르는 경우에 대한 오답을 살펴보고, 오답인 이유와 올바른 설명을 작성한다. 이를 바탕으로 회전체의 성질을 「나만의 탐정 규칙」으로 정리한다.



개발 의도

학생들이 지금까지의 탐구 결과를 바탕으로 회전체의 단면에 관한 자신의 생각을 점검하고 수정하도록 한다. 특히 오답을 수정하는 과정에서 '단면'과 '단면의 경계'를 구분하고, 회전축을 포함하는 서로 다른 평면으로 자른 단면이 모두 합동이라는 점과 각 단면이 회전축을 대칭축으로 하는 선대칭도형이라는 점을 명확히 설명하도록 설계하였다. 학생들은 1차시에서 3차시에 이르기까지 마주할 수 있는 오답과 그 이면의 오개념을 돌아보고, 탐색과 수정 과정을 통해 자신의 사고를 성찰한다.



발문

“회전축에 수직인 평면으로 자른 단면은 언제 원이 되나요? 원이 되지 않는 경우도 있나요?”

“회전축을 포함하는 서로 다른 평면으로 자를 때 생기는 단면의 모양과 크기를 비교하면 어떠한가요?”

“회전축을 포함하는 평면으로 자른 각 단면은 선대칭도형입니다. 이때의 대칭축은 무엇인가요?”

“지금까지 찾은 회전체의 여러 가지 성질을 「나만의 탐정 규칙」으로 정리해 볼까요?”



지도상의 유의점 및 대응 방안

- 「오답 처방전」에서는 정답만 제시하기보다 각 설명이 왜 잘못되었는지 탐구 결과를 근거로 설명하도록 한다.

- ‘단면이 원이다’와 ‘단면의 경계가 원이다’를 구분하도록 한다. 특히 회전체를 회전축에 수직인 평면으로 자를 때 생기는 단면이 원이 아닌 경우를 예를 들어 제시할 수 있도록 지도한다.

- 학생들이 가졌던 오개념을 돌아보고, 탐색과 수정 과정을 통해 자신의 생각이 어떻게 변화했는지(RISE)를 성찰하며 학습 내용을 정리하도록 지도한다.