오답의 재발견

평면도형

교사용 지도서

미션

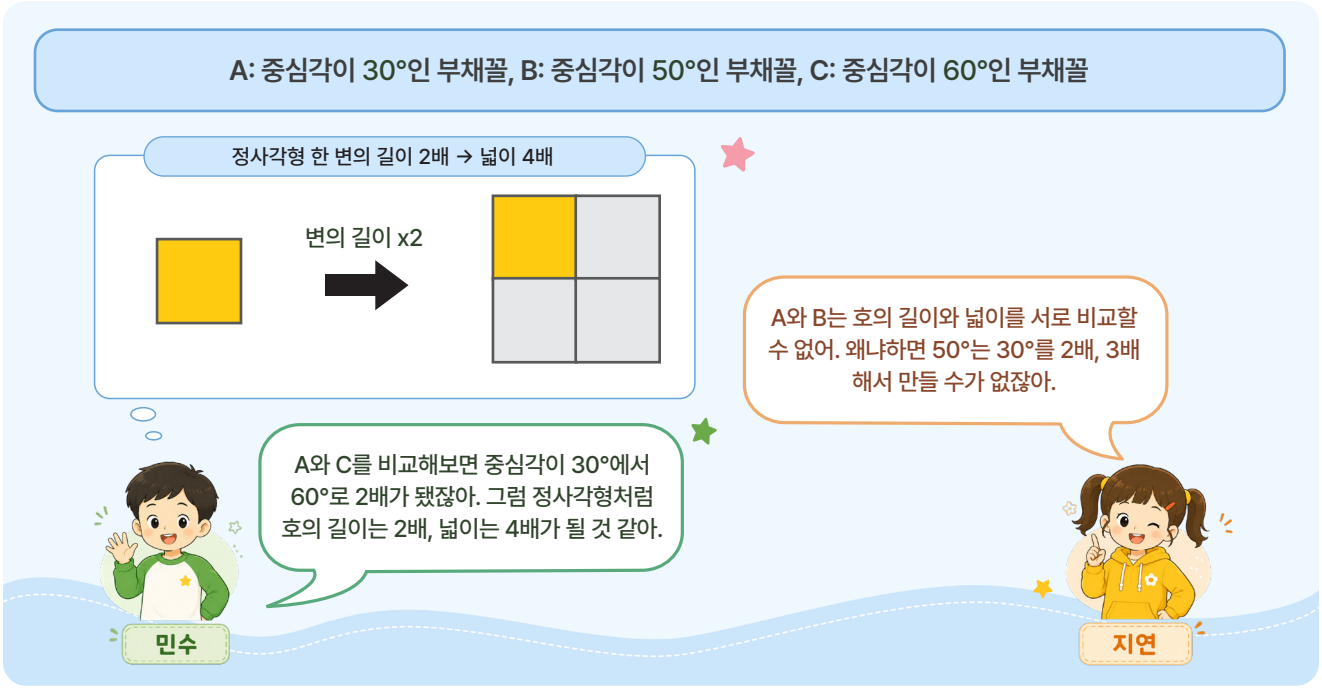
부채꼴의 호의 길이와 넓이를 변화시킨 배후를 찾아라!

탐정: _____

< 탐정 미션 1. 무엇이 맞을까? >

다음은 반지름의 길이가 같은 세 부채꼴 A, B, C의 호의 길이와 넓이에 대한 두 학생의 의견입니다. 두 학생의 의견에 대해 여러분의 생각을 정하고, 그 이유도 적어 봅시다.

A: 중심각이 30°인 부채꼴, B: 중심각이 50°인 부채꼴, C: 중심각이 60°인 부채꼴



나의 생각

- 민수의 의견에 (동의한다. / 동의하지 않는다.) 왜냐하면 길이는 cm, 넓이는 cm^2인 것처럼 둘은 단위부터 다르니까 길이가 2배로 늘어나면 넓이는 더 늘어나야 할 것 같다. 그래서 정사각형처럼 4배로 늘어난다는 민수의 생각에 동의한다.
- 지연이의 의견에 (동의한다. / 동의하지 않는다.) 왜냐하면 부채꼴 A와 C를 비교할 때는 30°인 부채꼴을 2개 똑같이 붙여서 60°를 만들 수 있으니까, 몇 배가 되는지 한눈에 알 수 있는데 부채꼴 A와 B는 둘 중 하나로 다른 하나를 똑같이 붙여 만들 수 없으니까 호의 길이나 넓이를 비교할 수가 없어 지연이의 생각에 동의한다.

활동 개관

부채꼴의 중심각의 크기와 호의 길이, 넓이의 관계를 정사각형의 한 변의 길이와 넓이의 관계와 비교하며 판단해 보고, 중심각이 정수배가 아닌 경우에도 정비례 관계가 성립하는지 판단해 본다.

개발 의도

학생들이 부채꼴의 중심각의 크기와 호의 길이, 넓이 사이의 관계를 탐구하기에 앞서, 자신의 기존 지식과 두 학생 각각의 의견을 비교해 보며 그 의견이 옳은지 스스로 판단하도록 설계하였다. 학생들은 정사각형에서 한 변의 길이와 넓이의 관계를 부채꼴 상황에 부적절하게 적용하여, 중심각이 2배가 되면 넓이는 4배가 된다고 추측할 수 있다. 또한 정수배 관계는 비교적 쉽게 인식하지만, 30°, 50°와 같이 정수배로 비교되지 않는 경우에는 비례 관계를 파악하는 데 어려움을 겪을 수 있다.
본 활동은 이러한 오개념을 드러내고, 학생들이 자신의 추측과 판단 근거를 표현한 뒤 서로 다른 의견을 비교하며 인지적 갈등을 경험하도록 하는 데 목적이 있다.

발문

"정사각형이 한 변의 길이가 2배 되는 것과 부채꼴의 중심각의 크기가 2배 되는 것은 어떤 차이점이 있을까요?"

"정사각형은 가로와 세로가 모두 2배씩 늘어났죠. 그럼 30°인 부채꼴을 60°로 만들 때는 어떻게 커지는 걸까요?"

"부채꼴 A와 B를 직접 비교할 수 없다면, 또 다른 부채꼴을 이용하여 비교할 수는 없을까요?"

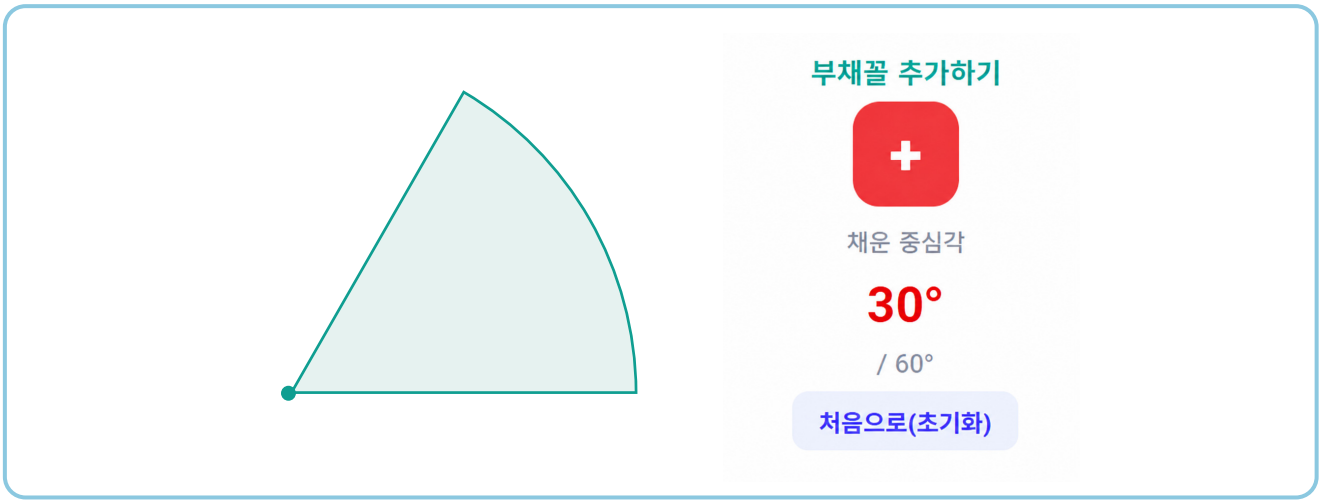
지도상의 유의점 및 대응 방안

-학생이 오답을 제시하더라도 교사는 즉시 "틀렸다"고 수정하지 않는다.

-정사각형은 가로, 세로 두 방향으로 늘어나고 부채꼴은 한 방향으로 늘어난다는 사실이나, 정수배가 아닐 때 분수를 활용하는 비례식 계산법을 교사가 직접적으로 제시하지 않는다.

-교사는 정답을 설명하기보다 학생들이 이어지는 [문제 상황1], [문제 상황2]와 2차시의 탐색 활동에서 자신의 예상과 실제 결과 사이의 차이를 발견하고, 기존 생각을 스스로 재검토하도록 유도한다.

문제 상황 1 민수의 의견을 확인하기 위해 아래 문제를 해결해 봅시다.



공학도구 링크 https://localcdn.cemware.com/2026/3_filling_a_sector.html

1 중심각이 2배(60°)가 되면 호의 길이와 넓이는 원래(30°)의 몇 배가 되나요?

호의 길이는 (2)배, 넓이는 (2)배

2 정사각형과 달리 부채꼴의 경우 중심각이 2배가 될 때, 부채꼴의 넓이가 4배가 되지 않는 이유를 생각해 봅시다.

정사각형에서 변의 길이가 2배 된다는 것은 가로, 세로의 길이가 모두 2배 된다는 것이다. 두 방향 모두 2배가 되므로 넓이가 4배 되지만, 부채꼴에서 중심각이 2배 된다는 것은 반지름의 길이는 그대로인 상태로 똑같은 조각이 옆으로 하나 더 붙었기 때문에 호의 길이도 넓이도 그대로 2배가 된다.

활동 개관

중심각의 크기가 30°인 부채꼴에 동일한 부채꼴을 이어 붙여 중심각이 60°인 부채꼴을 만드는 과정을 직접 조작해 보며, 중심각이 2배가 되면 호의 길이와 넓이도 정확히 2배가 됨을 시각적으로 확인한다.

개발 의도

학생들이 공학 도구를 활용하여 반지름의 길이가 같은 부채꼴의 중심각을 30°에서 60°로 변화시키고, 그에 따른 호의 길이와 넓이의 변화를 직접 확인하도록 설계한 활동이다. 이를 통해 도입부에서 나타날 수 있는 "중심각이 2배가 되면 넓이는 4배가 된다."는 오개념에 인지적 불균형을 유발하고자 하였다. 학생들은 조작 결과를 바탕으로 자신의 추측을 점검하며, 반지름이 같은 부채꼴에서는 중심각의 크기에 따라 호의 길이와 넓이가 비례적으로 변한다는 사실을 직관적으로 확인하게 된다.

발문

"'추가하기' 버튼을 누를 때 부채꼴의 어느 부분은 변하고, 어느 부분은 전혀 변하지 않았는지 자세히 관찰해 볼까요?"

"부채꼴에서 중심각의 크기가 2배 늘어나는 상황과 정사각형에서 한 변의 길이가 2배 늘어나는 상황은 어떤 차이가 있는 걸까요?"

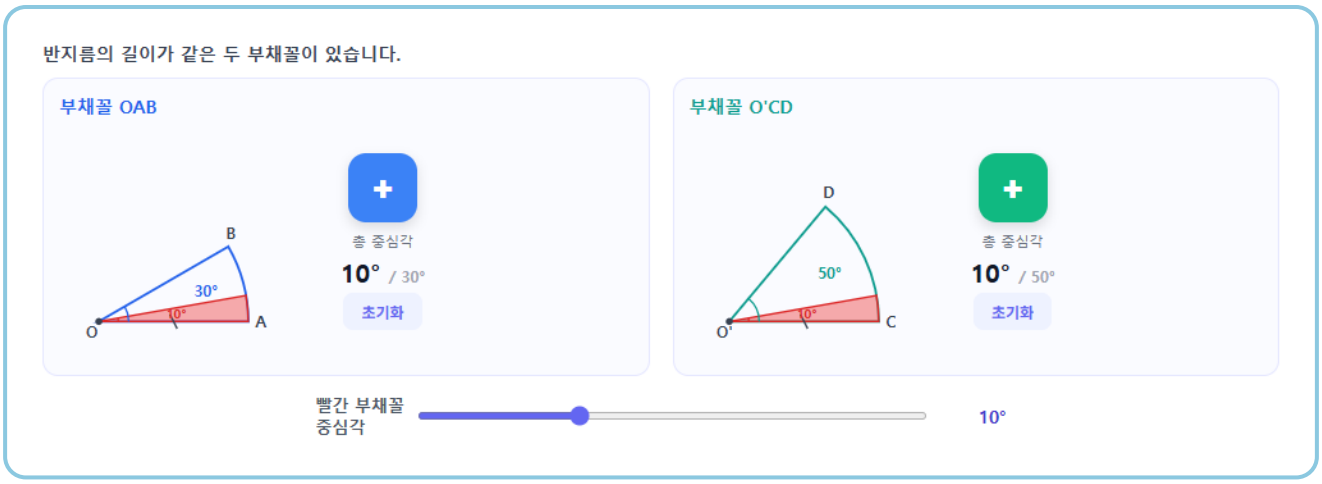
"정사각형의 넓이가 4배가 되려면 변의 길이가 어떻게 변해야 했죠? 그것과 비교하면 지금 부채꼴의 반지름은 어떻게 되었나요?"

지도상의 유의점 및 대응 방안

-학생들이 공학도구를 올바르게 다루며 학습할 수 있도록 순회 지도한다. 부채꼴 추가하기 버튼을 클릭해 보도록 권유하며 조작 활동의 초점을 강조한다.

-2번 문제에서는 학생들에게 엄밀한 대수적 설명을 요구하기보다, 부채꼴을 채워 보며 확인한 결과에 근거한 직관적인 설명도 인정한다. 이후 탐정 미션 2의 [탐색 1] 6번 문제에서 부채꼴의 중심각이 2배 늘어날 때 호의 길이가 2배 늘어나는 이유를 식으로 설명하며 정비례 관계를 대수적으로 정당화한다. 이때 정사각형의 경우와 비교하여, 한 변의 길이가 2배가 될 때 넓이가 4배가 되는 이유를 공식과 함께 다룰 수 있다.

문제 상황 2 지연이의 의견을 확인하기 위해 아래 문제를 해결해 봅시다.



공학도구 링크 https://localcdn.cemware.com/2026/4_filling_two_sectors.html

1 부채꼴 OAB와 부채꼴 O'CD에 중심각의 크기가 □°인 빨간 부채꼴이 각각 몇 개씩 들어가나요?

예시) 중심각이 10°인 부채꼴이 각각 3개, 5개씩 들어간다.

중심각이 2°인 부채꼴이 각각 15개, 25개씩 들어간다.

2 $\overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{CD}$ 는 얼마일까요?

$\overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{CD} = 3 : 5$ 또는 $\overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{CD} = 15 : 25 = 3 : 5$

3 $\overset{\frown}{AB}$ 는 $\overset{\frown}{CD}$ 의 몇 배일까요?

$\overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{CD} = 3 : 5$ 이므로 $\overset{\frown}{AB}$ 는 $\overset{\frown}{CD}$ 의 $\frac{3}{5}$ 배이다.

4 부채꼴 OAB의 넓이: 부채꼴 O'CD의 넓이는 얼마일까요?

부채꼴 OAB의 넓이: 부채꼴 O'CD의 넓이 = 3 : 5

5 부채꼴 OAB의 넓이는 부채꼴 O'CD 넓이의 몇 배일까요?

부채꼴 OAB의 넓이: 부채꼴 O'CD의 넓이 = 3 : 5이므로 부채꼴 OAB의 넓이는 부채꼴 O'CD의 넓이의 $\frac{3}{5}$

배이다.

활동 개관

공학 도구를 활용하여 중심각의 크기가 30°와 50°인 두 부채꼴 안에 공통 단위각(예: 10°)을 중심각으로 갖는 부채꼴이 각각 몇 개씩 들어가는지 조작해 보고, 이어지는 5개의 단계별 질문에 답하며 중심각이 정수배가 아닌 상황에서도 호의 길이와 넓이의 비를 구할 수 있음을 확인한다.

개발 의도

학생들이 공학 도구를 활용하여 반지름의 길이가 같은 두 부채꼴의 중심각의 크기를 모두 나눌 수 있는 공통 단위각을 찾아보면서, 정비례 관계를 정수배 관계에만 한정 지어 생각하는 오개념을 점검하도록 설계한 활동이다. 학생들은 공통 단위각을 중심각으로 갖는 부채꼴로 두 부채꼴을 각각 채워 보는 조작 활동을 통해, 정수배 관계가 아닌 경우에도 공통 단위로 비를 구할 수 있으며, 반지름이 같은 부채꼴에서는 중심각의 크기에 따라 호의 길이와 넓이가 비례적으로 변한다는 사실을 직관적으로 탐구하게 된다.

발문

"빨간 부채꼴 중심각의 크기를 조절할 때 어떤 점을 고려해야 할까요?"

"30°도 나누어떨어지고 50°도 나누어떨어지는 각의 크기는 무엇이 있을까요?"

"빨간 부채꼴의 중심각의 크기가 변하더라도, 변하지 않는 다른 무언가가 있을까요?"

"'$\overset{\frown}{AB}$ 는 $\overset{\frown}{CD}$ 의 몇 배일까요?'라는 질문이 잘 이해가 안 된다면, '10은 5의 몇 배일까요?'라는 질문으로 바꾸어서 생각해 봐요."

지도상의 유의점 및 대응 방안

-학생들에게 '최대공약수를 구하라'고 직접 지시하기보다는, 슬라이더를 조작하며 30과 50을 모두 등분할 수 있는 수를 스스로 찾아내도록 충분한 탐색 시간을 제공한다.

-탐색한 결과를 공유하고, 공통 단위각으로 생각할 수 있는 4가지 경우(1도, 2도, 5도, 10도) 모두 3 : 5라는 동일한 비가 나타나는 것에 주목하게 한다.

-2번과 4번의 결과, 3번과 5번의 결과가 각각 동일하다는 것을 확인하고, 이 수가 주어진 두 중심각의 크기 30°, 50°와 관련 있음을 파악할 수 있도록 한다.

-3 : 5라는 비를 구하는 것과 $\frac{3}{5}$ 배라는 배수를 구하는 것이 결국 같은 수학적 의미임을 연결 지어 이해할 수 있도록 돕는다.

-5번 질문까지 마친 후, "그렇다면 2배, 3배로 떨어지지 않으면 비교할 수 없다고 했던 지연이의 말은 참일까, 거짓일까?"라고 다시 한 번 명시적으로 질문하여 오개념을 인식했는지 확인한다.

[문제 상황1]과 [문제 상황 2]를 통해 내가 가지게 된 '부채꼴의 중심각의 크기와 호의 길이, 넓이의 관계'에 대한 생각을 아래에 적어 봅시다.

탐정 메모

처음에는 중심각이 2배가 되면 정사각형처럼 넓이는 4배가 될 것이라고 생각했다. 그런데 [문제 상황1]을 통해 부채꼴에서는 중심각이 2배가 되면 호의 길이와 넓이도 각각 2배가 된다는 것을 알게 되었다. 또 30°와 50°처럼 정수배로 비교되지 않는 경우에도, 공통 단위각으로 나누어 보면 3:5처럼 비교할 수 있었다. 그래서 중심각의 크기의 비가 호의 길이와 넓이의 비와 관련이 있을 것 같지만, 이 관계가 항상 맞는지는 더 탐구해 보고 싶다.

활동 개관

[문제 상황1]과 [문제 상황2]를 통해 '부채꼴의 중심각의 크기, 호의 길이, 넓이의 관계'에 대한 나의 생각이 어떻게 변화했는지 [탐정 메모] 빈칸에 스스로 적어 본다.

개발 의도

1차시 활동의 핵심인 '오개념 인식 및 인지적 불균형'을 학생 스스로 글로 표현하며 명확히 구조화하도록 돕기 위해 설계한 활동이다. 민수와 지연이의 오류(정사각형처럼 중심각의 크기가 2배 되면 호의 길이는 2배, 넓이는 4배 늘어난다는 생각/ 두 부채꼴의 크기가 정수배가 되지 않으면 호의 길이, 넓이를 비교할 수 없다는 생각)을 돌아보고, 실제 조작 활동을 통해 확인한 결과를 자신의 언어로 정리하게 한다. 이를 통해 부채꼴의 중심각의 비가 호의 길이, 넓이의 비와 일치한다는 규칙성에 대한 호기심을 유발하고, 나아가 다음 차시에서 이어질 정비례 관계의 일반화 탐구에 대한 내적 동기와 필요성을 느끼도록 유도한다.

발문

"오늘 활동을 통해 무엇을 새롭게 알게 되었나요?"

"정사각형과는 달리 부채꼴에서 중심각의 크기가 2배 되었을 때 호의 길이와 넓이는 어떻게 변화됐었죠?"

"그리고 두 중심각의 크기가 꼭 정수배가 되지 않더라도, 우리는 두 중심각의 크기의 무엇에 초점을 맞추면 될까요?"

지도상의 유의점 및 대응 방안

-학생들이 수학적 용어를 정확하게 사용하지 못하더라도 자신의 생각을 자유롭게 표현하도록 격려한다. 이 단계에서는 정답을 맞히는 것보다 조작 활동을 통해 새롭게 알게 된 점이나 의문을 자신의 언어로 정리하는 데 의미를 둔다.

-학생들이 작성한 탐정 메모를 발표하고 서로의 생각을 비교·공유하도록 한다. 다양한 의견을 나누는 과정에서 같은 결과를 보고도 서로 다른 생각을 할 수 있음을 확인하고, 오답을 단순한 실수가 아니라 새로운 탐구를 시작하는 단서로 받아들이는 분위기를 조성한다.

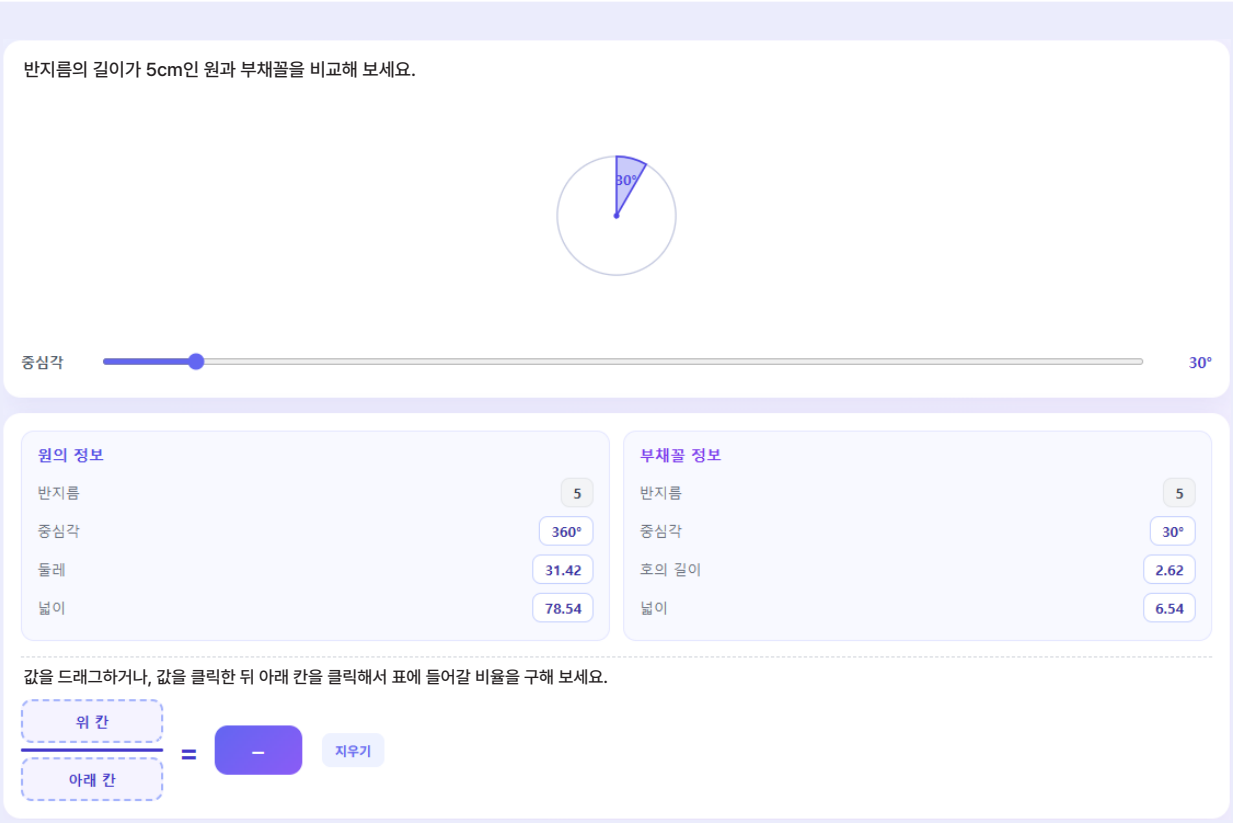
미션

부채꼴의 호의 길이와 넓이를 변화시킨 배후를 찾아라!

탐정: _____

< 탐정 미션 2. 숨은 단서를 찾아라! >

탐색 1 원과 부채꼴을 비교하며 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 구하는 방법을 탐색해 봅시다.



공학도구 링크 https://localcdn.cemware.com/2026/1_circle_and_sector_comparison.html

1 부채꼴의 중심각 크기를 변화시키며 표를 작성해 봅시다.

중심각의 크기	360°에 대한 부채꼴의 중심각의 크기의 비율	원주에 대한 호의 길이의 비율	원의 넓이에 대한 부채꼴의 넓이의 비율
30°	0.08	0.08	0.08
47°	0.13	0.13	0.13
134°	0.37	0.37	0.37

2 표에서 파악할 수 있는 공통된 사실은 무엇인가요?

중심각의 크기가 고정될 때, 360°에 대한 부채꼴의 중심각의 크기의 비율 = 원주에 대한 호의 길이의 비율

= 원의 넓이에 대한 부채꼴의 넓이의 비율

3 왜 그러한 결과가 나타났다고 생각하나요?

지난 시간에 중심각이 커지면 호의 길이랑 넓이도 똑같은 비율로 커진다고 배웠다.

4 파악한 공통된 사실을 통해, 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 원을 이용해 표현하는 방법은 무엇인지 생각해 봅시다.

원래 원의 둘레나 원의 넓이를 먼저 구한 다음에, 360° 중에서 부채꼴의 중심각의 크기가 얼마만큼 차지하는지 그 비율을 곱해주면 된다. 호의 길이 = 원주 × $\frac{x}{360}$ 부채꼴의 넓이 = 원의 넓이 × $\frac{x}{360}$

배웠어요

- (원주)
  = (지름의 길이)
  × (원주율)
- (원의 넓이)
  = (반지름의 길이)
  × (반지름의 길이)
  × (원주율)

원에서 지름의 길이에 대한 원의 둘레의 길이의 비율인 원주율은 일정하며 그 값은 3.1415926535897932…와 같이 한없이 계속되는 소수라고 알려져 있다. 초등학교에서 3.14로 어림하여 사용했던 원주율을 기호로 π와 같이 나타내고, '파이'라고 읽는다. 반지름의 길이가 r인 원에서 원주와 원의 넓이를 π를 사용하여 나타내면

(원주)=$2\pi r$

(원의 넓이)=πr^2

5 4번을 통해 알게 된 사실을 통해 부채꼴의 호의 길이 l 과 넓이 S 를 식으로 나타내 봅시다.

: (원주) = $2\pi r$ 이므로 4번에 쓴 식으로 정리하면

호의 길이 l = $2\pi r \times \frac{x}{360}$

또한, (원의 넓이) = πr^2이므로 4번에 쓴 식으로 정리하면

부채꼴의 넓이 S = $\pi r^2 \times \frac{x}{360}$

6 부채꼴의 중심각이 2배가 될 때, 호의 길이와 넓이가 2배가 되는 이유를 식으로 설명해 봅시다.

5번 식에서 중심각이 2배가 되었으므로 x대신 $2x$를 대입해보면 호의 길이 $l = 2\pi r \times \frac{2x}{360} = 2 \times (2\pi r \times \frac{x}{360}) = 2l$ 이므로 중심각의 크기가 2배 되면 부채꼴의 호의 길이도 2배가 된다. 같은 방법으로 부채꼴의 넓이 $S = \pi r^2 \times \frac{2x}{360} = 2 \times (\pi r^2 \times \frac{x}{360}) = 2S$이므로 중심각의 크기가 2배 되면 부채꼴의 넓이도 2배가 된다.

7 위 활동에서 찾은 '숨은 단서'를 정리해 봅시다.

오늘 발견한 숨은 단서!

부채꼴의 호의 길이와 넓이를 구하는 첫 번째 숨은 단서는

원주와 원의 넓이에 원 전체에 대한 부채꼴 중심각의 크기의 비율을 곱하여

구할 수 있다는 것 이다.

활동 개관

공학도구로 부채꼴의 중심각의 크기를 조작하며 '360°에 대한 부채꼴의 중심각의 크기의 비율', '원주에 대한 호의 길이의 비율', '원의 넓이에 대한 부채꼴 넓이의 비율'을 구해 표를 완성한다. 완성한 표를 통해 세 비율이 항상 일치한다는 사실을 귀납적으로 확인한 후, 이 관계를 바탕으로 원의 반지름과 중심각을 이용해 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 구하는 공식을 스스로 유도해 본다. 나아가, 유도한 식을 활용하여 중심각이 2배가 되면 호의 길이와 넓이도 2배가 되는 이유를 대수적으로 설명해 본다.

개발 의도

1차시에서 직관적으로 확인한 정비례 관계를 출발점으로 삼아, 이를 수식으로 일반화하고 정당화하도록 설계한 활동이다. 학생들은 '360°에 대한 부채꼴의 중심각의 크기의 비율', '원주에 대한 호의 길이의 비율', '원의 넓이에 대한 부채꼴 넓이의 비율'이 서로 같음을 파악하게 된다. 이를 바탕으로 부채꼴의 호의 길이와 넓이 공식을 기계적으로 암기하는 것이 아니라, 원의 둘레와 넓이에 중심각의 크기의 비율($\frac{x}{360}$)을 곱하여 구할 수 있음을 관계 속에서 이해하게 된다. 나아가 중심각이 2배가 되면 호의 길이와 넓이도 2배가 되는 이유를 식으로 설명하며 정비례 관계를 대수적으로 정당화하도록 하였다.

발문

"A에 대한 B의 비율은 $\frac{A}{B}$ 일까요, $\frac{B}{A}$ 일까요?"(질문1, 2)

"선생님과 방금 정리했던 (원주)=$2\pi r$, (원의 넓이)=πr^2 이 식을 이용해 볼까요?"

"중심각의 크기가 2배 된다는 것을 문자로 표현해 보면 어떨까요?"

지도상의 유의점 및 대응 방안

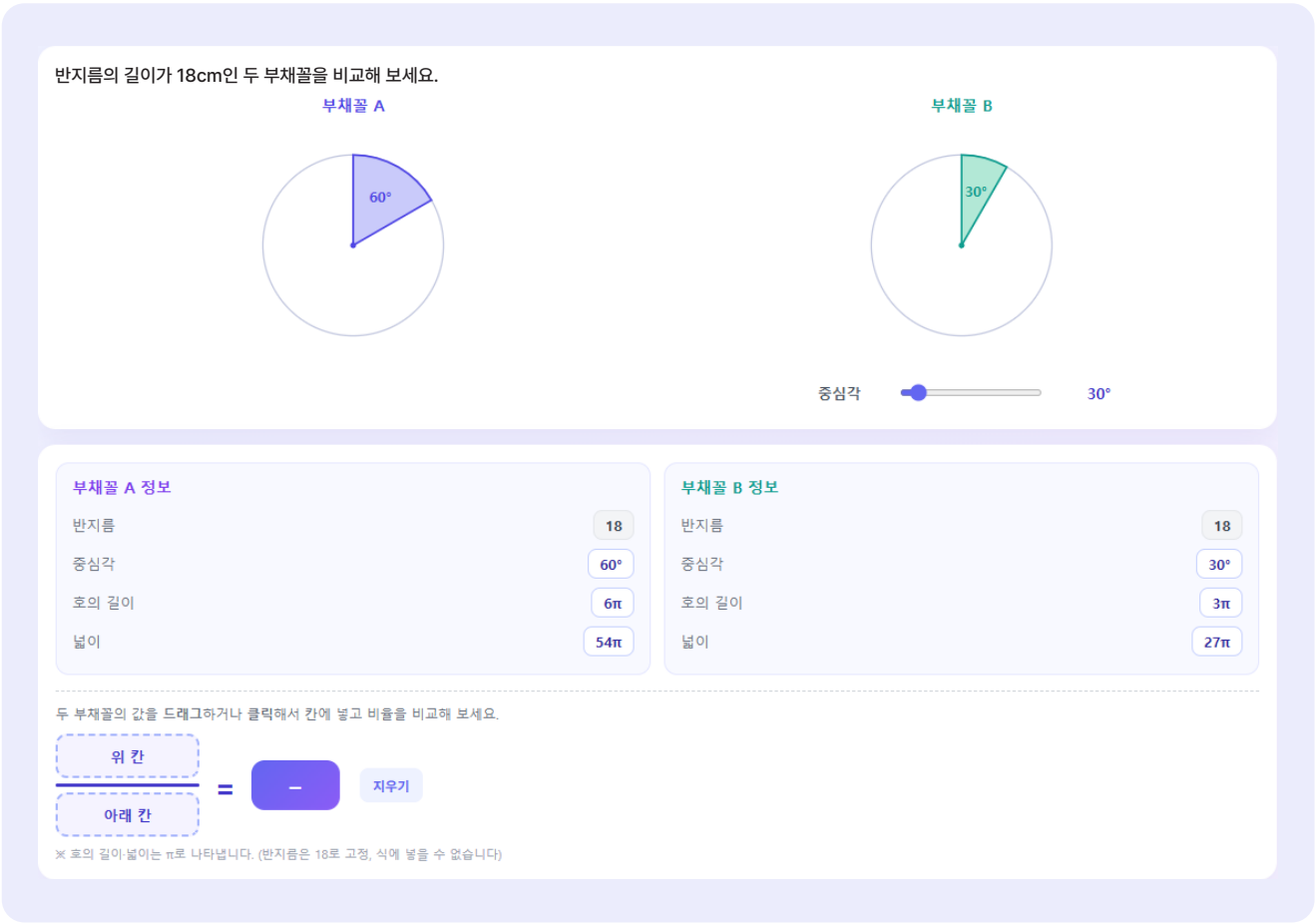
-초등학교에서 배웠던 비율 개념을 재확인시키는 과정이 필요하다. 위 활동 도입부에 'A에 대한 B의 비율'의 의미를 지도한다.

-공학도구에 제시된 원의 정보(둘레, 넓이)와 부채꼴 정보(호의 길이, 넓이)는 아직 학생들에게 원주율 π 를 도입하기 전이므로 π 를 포함한 식이 아닌 측정값을 소수점 둘째 자리까지 반올림한 소수 형태로 제시되어 있다. 따라서, 이 수치들을 이용하여 학생들이 직접 계산기 등으로 구하게 될 세 가지 비율(360°에 대한 부채꼴의 중심각의 크기의 비율, 원주에 대한 호의 길이의 비율, 원의 넓이에 대한 부채꼴의 넓이의 비율) 역시 소수점 아래에서 반올림된 값으로 나타난다는 점을 유의하여 지도한다.

-공학 도구에서 임의의 중심각을 설정하여 계산하다 보면 세 비율의 값이 정확히 일치하지 않는 경우가 발생할 수 있다. 교사는 이것이 원주율 π 를 사용하지 않고 근사치를 이용해 계산하여 생긴 오차임을 인지하고, 학생들이 오차에 집착하기보다 '비율이 거의 일정하게 유지된다'는 경향성을 파악하는 데 집중하도록 지도한다.

-[탐색 1]의 활동을 통해 원주율 π 를 도입한 이후부터는, 호의 길이와 넓이를 소수점 둘째 자리까지 반올림한 소수(측정값) 형태 대신 원주율 π 를 사용하여 정확한 식으로 나타내도록 한다.

탐색 2 두 부채꼴을 비교하며 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 구하는 방법을 탐색해 봅시다.



공학도구 링크 https://localcdn.cemware.com/2026/2_two_sectors_comparison.html

1 오른쪽 부채꼴의 중심각 크기를 변화시키며 표를 작성해 봅시다.

중심각의 크기	부채꼴 A의 중심각의 크기에 대한 부채꼴 B의 중심각의 크기의 비율	부채꼴 A의 호의 길이에 대한 부채꼴 B의 호의 길이의 비율	부채꼴 A의 넓이에 대한 부채꼴 B의 넓이의 비율
20°	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
40°	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

2 표에서 파악할 수 있는 공통된 사실은 무엇인가요?

중심각의 크기가 고정되었을 때, 부채꼴 A의 중심각의 크기에 대한 부채꼴 B의 중심각의 크기의 비율 = 부채꼴 A의 호의 길이에 대한 부채꼴 B의 호의 길이의 비율 = 부채꼴 A의 넓이에 대한 부채꼴 B의 넓이의 비율

3 왜 그러한 결과가 나타났다고 생각하나요?

부채꼴 A와 부채꼴 B 모두 결국은 '같은 원'에서 잘라낸 조각들이다. [탐색 1]에서 각 부채꼴이 원 전체에 대해 일정한 비율(정비례)을 갖는다는 것을 확인했으니, 같은 원을 기준으로 하는 두 조각(부채꼴)끼리 비교했을 때도 당연히 일정한 비율을 갖게 된다.

4 파악한 공통된 사실을 통해, 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 주어진 부채꼴을 이용해 표현하는 방법은 무엇인지 생각해 봅시다.

$$\text{구하려는 부채꼴의 호의 길이} = \text{주어진 부채꼴의 호의 길이} \times \frac{\text{구하려는 부채꼴의 중심각의 크기}}{\text{주어진 부채꼴의 중심각의 크기}}$$

$$\text{구하려는 부채꼴의 넓이} = \text{주어진 부채꼴의 넓이} \times \frac{\text{구하려는 부채꼴의 중심각의 크기}}{\text{주어진 부채꼴의 중심각의 크기}}$$

5 위 활동에서 찾은 '숨은 단서'를 정리해 봅시다.

오늘 발견한 숨은 단서!

부채꼴의 호의 길이와 넓이를 구하는 두 번째 숨은 단서는
반지름이 같은 다른 부채꼴의 호의 길이와 넓이에 두 부채꼴의 중심각의 크기의 비율을 곱하여 구할 수 있다는 것 이다.

활동 개관

공학 도구를 조작하여 반지름이 같은 두 부채꼴, 고정된 부채꼴 A와 중심각이 변하는 부채꼴 B를 비교한다. '부채꼴 A의 중심각의 크기에 대한 부채꼴 B의 중심각의 크기의 비율', '부채꼴 A의 호의 길이에 대한 부채꼴 B의 호의 길이의 비율', '부채꼴 A의 넓이에 대한 부채꼴 B의 넓이의 비율'을 각각 구하여 표를 완성하고, 이 세 비율이 항상 일치한다는 사실을 파악한다. 이를 바탕으로 기준이 되는 한 부채꼴의 정보(중심각, 호의 길이, 넓이)와 새로운 부채꼴의 중심각만 알면, 두 부채꼴 사이의 비례 관계를 이용하여 새로운 부채꼴의 호의 길이와 넓이도 쉽게 구해낼 수 있음을 확인하고 서술한다.

개발 의도

[탐색1]에서 원 전체와 부채꼴 사이의 관계를 통해 확인한 정비례 관계를, 반지름이 같은 두 부채꼴 사이의 관계로 확장하여 탐구하도록 설계한 활동이다. 학생들은 원 전체를 기준으로 삼지 않더라도, 반지름이 같은 두 부채꼴에서는 중심각의 크기의 비, 호의 길이의 비, 넓이의 비가 서로 같게 유지됨을 귀납적으로 파악하게 된다. 이를 통해 원 전체의 둘레나 넓이를 구하는 공식을 이용하지 않고도, 두 부채꼴 사이의 비례식을 세워 호의 길이와 넓이를 구할 수 있음을 이해하도록 하였다.

발문

“[탐색1]에서는 분모에 360°가 들어갔는데, 이번에는 분모에 어떤 각도가 들어가죠? 기준이 '원'에서 '주어진 부채꼴'로 바뀌어도 '정비례'는 계속 유지될까요?”

“구하려는 부채꼴 B의 호의 길이, 넓이를 구하려 할 때, 주어진 부채꼴 A의 호의 길이, 넓이에 어떤 비를 곱해야 할까요? 부채꼴 A의 중심각의 크기에 대한 부채꼴 B의 중심각의 크기의 비율일까요? 부채꼴 B의 중심각의 크기에 대한 부채꼴 A의 중심각의 크기의 비율일까요?”

"비율을 바로 곱하려니 헷갈리죠? 그럼 어떤 부채꼴이 기준인지 생각해봐요. 그리고 이전 차시에서 원을 기준으로 삼았을 때 분모에 들어간 게 뭐였죠?"

지도상의 유의점 및 대응 방안

-[탐색2]에서는 소수 형태의 근사치가 아닌 원주율 π 를 포함한 참값을 사용한다. 따라서 중심각의 크기를 임의로 변화시키더라도 '부채꼴 A에 대한 부채꼴 B의 중심각의 크기, 호의 길이, 넓이의 비율'이 오차 없이 정확하게 일치함을 확인할 수 있다.

-학생들이 구하려는 부채꼴(B)과 주어진 부채꼴(A)의 중심각의 비를 분수로 나타낼 때 분모와 분자의 위치를 혼동한다면, '기준이 되는 값(기준량)'이 무엇인지 먼저 파악하게 한다. 특히 앞선 [탐색1]에서 전체 원을 기준으로 삼아 분모에 360°를 두었던 경험을 상기시켜, 이번 활동에서도 기준이 되는 부채꼴 A의 중심각이 자연스럽게 분모에 위치해야 함을 이해하도록 지도한다.

미션

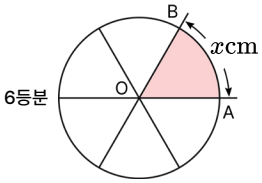
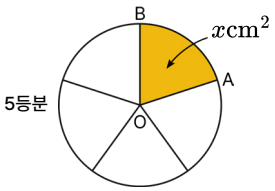
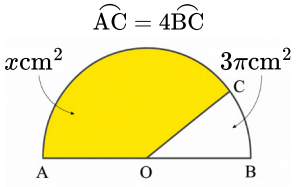
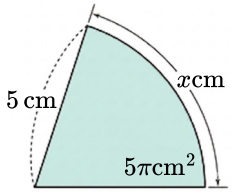
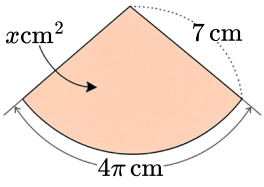
부채꼴의 호의 길이와 넓이를 변화시킨 배후를 찾아라!

탐정: _____

< 탐정 미션 3. 부채꼴에 대한 전문가가 되어라! >

문제 지난 시간까지 학습한 내용을 돌아보며 아래 문제를 해결해 봅시다.

1 다음 상황에서 x를 구할 수 있는지 판단하고, 그 풀이 과정을 친구와 비교해 봅시다.

번호	조건	x를 구할 수 있는가?	x를 구하는 풀이 과정	풀이 과정 비교
(1)	원 O의 둘레= 18π cm 	☑ 예 ☐ 아니오	예시1) 원을 6등분 한 부채꼴이므로 $360°$에 대한 중심각의 크기 비율이 $\frac{1}{6}$이다. 따라서 $x=18\pi\times\frac{1}{6}=3\pi$ 이다. 예시2) 원을 6등분 한 부채꼴이므로 중심각의 크기가 $60°$이다. 따라서 $x=18\pi\times\frac{60}{360}=3\pi$ 이다.	
(2)	원 O의 넓이= 100π cm^2 	☑ 예 ☐ 아니오	예시1) 원을 5등분 한 부채꼴이므로 $360°$에 대한 중심각의 크기 비율이 $\frac{1}{5}$이다. 따라서 $x=100\pi\times\frac{1}{5}=20\pi$ 이다. 예시2) 원을 5등분 한 부채꼴이므로 $360°$에 대한 중심각의 크기가 $\frac{360}{5}=72°$이다. 따라서 $x=100\pi\times\frac{72}{360}=20\pi$ 이다.	
(3)		☑ 예 ☐ 아니오	부채꼴 BOC의 호의 길이에 대한 부채꼴 AOC의 호의 길이의 비율은 $\frac{4}{1}$이므로, 부채꼴 BOC의 넓이는 부채꼴 AOC의 넓이의 4배이므로 $x=12\pi$ 이다.	
(4)		☑ 예 ☐ 아니오	반지름이 5cm이고, 넓이가 5π cm^2 인 부채꼴이므로 $5\pi=25\pi\times\frac{a}{360}$라 할 수 있다. 이 식에서 중심각의 크기를 구하면 $a=72$이다. 따라서 $x=10\pi\times\frac{72}{360}=2\pi$ 이다.	
(5)		☑ 예 ☐ 아니오	반지름이 7cm이고, 호의 길이가 4π cm인 부채꼴이므로 $4\pi=14\pi\times\frac{a}{360}$라 할 수 있다. 이 식에서 중심각의 크기를 구하면 $a=\frac{720}{7}$이다. 따라서 $x=49\pi\times\frac{a}{360}$ $=49\pi\times\frac{720}{7}\times\frac{1}{360}=14\pi$ 이다.	

활동 개관

2차시 [탐색1]과 [탐색2]에서 학습한 정비례 관계를 바탕으로, 중심각의 크기가 명시적으로 주어지지 않은 다양한 문제 상황을 해결한다. 원과 부채꼴, 혹은 두 부채꼴 간의 '중심각의 크기의 비, 호의 길이의 비, 넓이의 비가 모두 같다.'는 성질을 유연하게 활용하여 미지수 x의 값을 구하고, 자신의 풀이 과정을 짝과 비교하며 더 효율적인 문제 해결 방법을 탐색한다.

개발 의도

학생들이 부채꼴 문제를 해결할 때 중심각의 크기를 먼저 구해야 한다는 기계적인 접근에서 벗어나, 주어진 조건들 사이의 비례 관계를 활용하여 다양한 해결 전략을 탐색하도록 설계한 활동이다. 학생들은 원과 부채꼴의 관계, 두 부채꼴 사이의 관계를 바탕으로 중심각의 크기의 비, 호의 길이의 비, 넓이의 비를 이용하면 중심각을 직접 구하지 않고도 문제를 간결하게 해결할 수 있음을 경험하게 된다. 이를 통해 공식에 값을 대입하는 절차보다 조건들 사이의 구조적 관계를 파악하는 것이 중요함을 이해하고, 상황에 적절한 풀이 방법을 선택하는 유연한 문제 해결력과 수학적 추론 능력을 기르도록 하였다.

발문

"중심각의 크기를 꼭 구해야만 할까요?"

"원 전체가 똑같은 크기로 몇 조각 나뉘어 있나요? 이 사실로 중심각의 크기를 몰라도 무엇은 파악할 수 있나요? "(문항 (1). (2)))

"$\overset{\frown}{\mathrm{AC}} = 4\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$을 통해 두 부채꼴의 넓이 관계를 파악할 수 있나요?"(문항 (3))

"중심각도 없고, 그림에 몇 등분인지 힌트도 없네요. 어떤 조건에 주목해 이용해야 할까요?"

(문항 (4), (5))

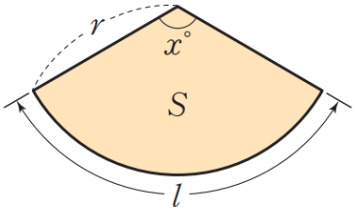
지도상의 유의점 및 대응 방안

-중심각의 크기가 명시되지 않은 경우, 일부 학생은 미지수 x를 구할 수 없다고 판단하거나 중심각을 먼저 구한 뒤 공식에 대입하는 복잡한 풀이를 시도할 수 있다. 교사는 학생들의 풀이 과정을 비교하게 하여, 중심각을 직접 구하지 않아도 주어진 조건 사이의 비례 관계를 이용하면 문제를 간결하게 해결할 수 있음을 확인하도록 한다. 이를 통해 비례식이나 비율을 활용한 풀이의 유용성과 효율성을 경험하도록 유도한다.

탐색 2차시에서 파악한 단서를 이용해 부채꼴의 호의 길이, 넓이를 구하는 또 다른 방법을 알아봅시다.

1 다음 부채꼴의 호의 길이를 l, 넓이를 S라 할 때, 2차시의 [탐색1]을 이용해 아래 표를 작성해 봅시다.

중심각의 크기	360°에 대한 부채꼴의 중심각의 크기의 비율	원주에 대한 호의 길이의 비율	원의 넓이에 대한 부채꼴의 넓이의 비율
$x°$	$\frac{x}{360}$	$\frac{l}{2\pi r}$	$\frac{S}{\pi r^2}$



2 중심각의 크기를 모르고, 반지름 r 과 부채꼴의 넓이 S 를 알고 있습니다. 1의 표에서 알게 된 사실을 이용해 호의 길이 l 을 식으로 나타내 봅시다.

호의 길이 $l = 2\pi r \times \frac{x}{360} = 2\pi r \times \frac{\square}{\square} =$

2차시 활동을 통해 알고 있는 사실 $\frac{x}{360} = \frac{l}{2\pi r} = \frac{S}{\pi r^2}$ 를 이용하면,

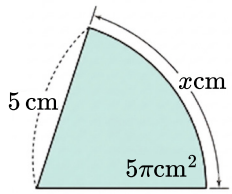
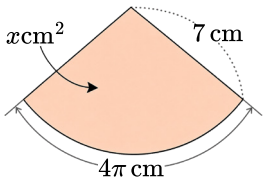
호의 길이 $l = 2\pi r \times \frac{x}{360} = 2\pi r \times \frac{S}{\pi r^2} = \frac{2S}{r}$이다.

3 중심각의 크기를 모르고, 반지름 r 과 부채꼴의 호의 길이 l 을 알고 있습니다. 1의 표에서 알게 된 사실을 이용해 부채꼴의 넓이 S 를 식으로 나타내 봅시다.

부채꼴의 넓이 $S = \pi r^2 \times \frac{x}{360} = \pi r^2 \times \frac{\square}{\square} =$

같은 방법으로 부채꼴의 넓이 $S = \pi r^2 \times \frac{x}{360} = \pi r^2 \times \frac{l}{2\pi r} = \frac{1}{2}rl$ 이다.

4 위 2, 3에서 찾은 식을 이용해 (4), (5)번을 다시 풀어봅시다.

(4)		2번 결과식 호의 길이 $l = \frac{2S}{r}$을 이용하면 $x = \frac{2S}{r} = \frac{2 \times 5\pi}{5} = 2\pi$이다.
(5)		3번 결과식 부채꼴의 넓이 $S = \frac{1}{2}rl$을 이용하면 $x = \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2} \times 7 \times 4\pi = 14\pi$이다.

5 위 활동에서 찾은 '숨은 단서'를 정리해 봅시다.

오늘 발견한 숨은 단서!

부채꼴의 호의 길이와 넓이를 구하는 세 번째 숨은 단서는
중심각의 크기의 비율을 원주에 대한 호의 길이의 비율이나 원의 넓이에 대한 부채꼴의
넓이의 비율로 바꿔 사용할 수 있다는 것 이다.

활동 개관

2차시에서 파악한 정비례 관계를 바탕으로, 중심각의 크기가 $x°$인 경우에 대한 세 비율을 표에 정리한다. 세 비율이 서로 같다는 관계를 이용하여 중심각의 크기가 포함되지 않은 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 구하는 새로운 식을 유도한다. 이후 새롭게 찾은 식으로 앞서 해결했던 (4), (5)번 문제를 다시 풀어보며, 더 간단하고 효율적인 풀이 방법이 있음을 확인한다.

개발 의도

2차시에서 파악한 정비례 관계를 활용하여, 중심각의 크기를 직접 구하지 않고도 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 구하는 새로운 방법을 탐구하도록 설계한 활동이다. 학생들은 '360°에 대한 중심각의 비율, 원주에 대한 호의 길이의 비율, 원의 넓이에 대한 부채꼴 넓이의 비율이 서로 같다.'는 관계를 활용하여, 중심각을 구하지 않고도 호의 길이와 넓이를 구할 수 있음을 알게 된다. 이를 통해 부채꼴 문제를 해결할 때 항상 중심각을 먼저 구해야 한다는 기계적 접근에서 벗어나, 주어진 조건에 따라 더 간단하고 효율적인 풀이 방법을 선택할 수 있음을 이해하도록 하였다.

발문

"부채꼴의 호의 길이 l을 표현하는 새로운 방식을 찾기 위해서 $\frac{x}{360}$ 를 $\frac{l}{2\pi r}$로 나타내는 것이 좋을까요, $\frac{S}{\pi r^2}$로 나타내는 것이 좋을까요?"
"부채꼴의 넓이 S을 표현하는 새로운 방식을 찾기 위해서 $\frac{x}{360}$를 $\frac{l}{2\pi r}$로 나타내는 것이 좋을까요, $\frac{S}{\pi r^2}$로 나타내는 것이 좋을까요?"

지도상의 유의점 및 대응 방안

-2, 3번 활동에서 $\frac{x}{360}$을 대체하는 값을 선택하는 과정에서 적절한 발문을 통하여 부채꼴의 호의 길이나 넓이를 표현하는 새로운 공식을 자연스럽게 유도한다.

정리 지금까지 배운 내용들을 정리해 봅시다.

1 오답들에 대한 처방전을 만들어 봅시다.

오답 처방전

1 반지름의 길이가 9cm인 부채꼴의 호의 길이나 넓이를 구하려면, 중심각의 크기를 반드시 알아야 한다.

→ 왜 오답일까? 중심각의 크기를 알지 못하더라도, 주어진 조건 사이의 비례 관계를 이용하면 호의 길이나 넓이를 구할 수 있기 때문이다.

→ 올바른 설명 중심각의 크기를 알지 못하더라도, 그 부채꼴이 속한 원 전체나 같은 반지름을 가진 다른 부채꼴과 비교하여 비례 관계를 이용하면 호의 길이나 넓이를 구할 수 있다.

2 반지름의 길이가 같은 두 부채꼴은 중심각의 크기가 2배, 3배처럼 정수배 관계일 때만 호의 길이와 넓이를 비교할 수 있다.

→ 왜 오답일까? 반지름의 길이가 같은 두 부채꼴에서는 중심각의 크기와 호의 길이, 부채꼴의 넓이가 정비례 관계이기 때문이다.

→ 올바른 설명 두 중심각의 크기가 2배, 3배처럼 정수배 관계가 아니더라도 비로 비교할 수 있다. 반지름의 길이가 같은 두 부채꼴에서는 중심각의 크기의 비, 호의 길이의 비, 넓이의 비는 항상 같으므로, 이 관계를 이용해 호의 길이나 넓이를 비교할 수 있다.

2 지금까지 배운 내용을 정리하여 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 구하는 나만의 탐정 규칙을 적어 봅시다.

나만의 탐정 규칙

부채꼴의 호의 길이와 넓이는

① 원주와 원의 넓이에 원 전체에 대한 부채꼴 중심각의 크기의 비율을 곱하여 구할 수 있다.

② 반지름이 같은 서로 다른 부채꼴의 호의 길이와 넓이에 두 부채꼴의 중심각의 크기의 비율을 곱하여 구할 수 있다.

③ 중심각의 크기의 비율을 원주에 대한 호의 길이의 비율이나 원의 넓이에 대한 부채꼴의 넓이의 비율로 바꿔서 구할 수 있다.

그것이 바로 우리가 찾던 '숨은 단서'이다!

활동 개관

1~3차시의 탐구 활동을 되돌아보며 제시된 오개념 문장을 비판적으로 분석하여 올바른 수학적 설명으로 수정하는 '처방전'을 작성한다. 이어서 지금까지의 탐구 활동을 통해 단계별로 수집했던 세 가지 '숨은 단서'를 종합하여 [나만의 탐정 규칙]을 완성한다.

개발 의도

1~3차시에 걸쳐 학습한 내용을 학생 스스로 언어로 재구성하고 표현하도록 설계하였다. 1차시에서 직면했던 자신의 오개념을 되돌아보고, 탐색과 추론 과정을 거치며 수학적 사고가 어떻게 변화하고 성장했는지(RISE)를 명시적으로 성찰하게 한다. 나아가 각 차시에서 발견한 '숨은 단서'들을 종합하여 자신만의 '규칙'으로 엮어냄으로써 메타인지를 촉진하고, 성공적인 문제 해결 경험과 함께 학습을 의미 있게 마무리하도록 돕는다.

발문

"중심각의 크기를 모르더라도 무엇을 알면 부채꼴의 호의 길이나 넓이를 구할 수 있을까요?"

"부채꼴은 커다란 '원'의 일부분이었죠? 원의 둘레나 넓이를 구한 다음, 거기에 어떤 비율을 곱해주면 부채꼴의 호의 길이나 넓이가 나왔나요?"

"꼭 원이 기준이 되어야만 구할 수 있는 건 아니었죠. 만약 원 대신 '반지름이 같은 다른 부채꼴'이 옆에 있다면, 두 부채꼴 사이에는 어떤 비율(비례식)이 성립한다고 했었죠?"

"2차시 [탐색] 활동에서 중심각이 30°와 50°인 부채꼴을 비교했던 것 기억나나요? 30은 50의 딱 떨어지는 정수배(2배, 3배)가 아닌데, 그때 우리는 두 부채꼴을 아예 비교할 수 없었나요?

"오답 처방전(2)의 문장이 틀린 진짜 이유는 무엇일까요? 부채꼴의 호의 길이와 넓이는 중심각이 어떻게 변하든 항상 '어떤 관계'를 유지하기 때문일까요?"

지도상의 유의점 및 대응 방안

- 수업 마무리 단계에서는 활동지의 「오답 처방전」과 「나만의 탐정 규칙」을 작성하도록 안내한다.

- 학생들이 1차시에서 가졌던 오개념을 돌아보고, 탐색과 수정 과정을 통해 자신의 생각이 어떻게 변화했는지(RISE)를 성찰하며 학습 내용을 정리하도록 지도한다.